28.03.2024

Diziler

Mesleki Matematik

Öğr.Gör. Serkan KORKMAZ
HARRAN ÜNİVERSİTESİ BİRECİK MESLEK YÜKSEKOKULU

Geometrik Dizi Nedir?

Matematikte, **geometrik dizi**, ardışık terimlerinin oranı sabit olan bir sayı dizisidir. Bu sabit sayıya **ortak oran** denir.

Örnek:

- 2, 4, 8, 16, 32, ... dizisi, ortak oranı 2 olan bir geometrik dizidir.
- 1/2, 1/4, 1/8, 1/16, 1/32, ... dizisi, ortak oranı 1/2 olan bir geometrik dizidir.

Geometrik Dizinin Özellikleri

- Geometrik dizide ilk terim ve ortak oran bilinirse, dizinin tüm terimleri hesaplanabilir.
- Geometrik dizinin n. terimi **a_n = a_1 * r^(n-1)** formülüyle hesaplanır. Burada:
  - **a_n**: n. terim
  - **a_1**: İlk terim
  - **r**: Ortak oran
  - **n**: Terimin sırası
- Geometrik dizinin sonsuz toplamı **S = a_1 / (1-r)** formülüyle hesaplanır. Burada:
  - **S**: Sonsuz toplam
  - **a_1**: İlk terim
  - **r**: Ortak oran
  - **|r| < 1** (Ortak oran mutlak değer olarak 1'den küçük olmalıdır.)

Geometrik Dizinin Kullanım Alanları

Geometrik diziler, matematik, fizik, mühendislik ve finans gibi birçok alanda kullanılır.

Bazı kullanım alanları:

- Faiz hesaplamaları
- Büyüme ve çürüme modelleri
- Diferansiyel denklemler
- Karmaşık analiz
- Olasılık ve istatistik

Geometrik Dizi Örnekleri

- Bir bankaya 1000 TL yatırdığınızı ve her yıl %10 faiz aldığınızı varsayalım. Bu durumda, bir yıl sonra 1100 TL, iki yıl sonra 1210 TL, üç yıl sonra 1331 TL ve bu şekilde devam edecektir. Bu para birimi, ortak oranı 1.1 olan bir geometrik dizi oluşturur.
- Bir bakterinin her saat başı ikiye bölündüğünü varsayalım. Bu durumda, bir saat sonra 2 bakteri, iki saat sonra 4 bakteri, üç saat sonra 8 bakteri ve bu şekilde devam edecektir. Bu bakteri sayısı, ortak oranı 2 olan bir geometrik dizi oluşturur.

Geometrik Dizi Hakkında Daha Fazla Bilgi

Geometrik diziler hakkında daha fazla bilgi edinmek için şu kaynaklara bakabilirsiniz:

- **Geometrik dizi - Vikipedi: [geçersiz URL kaldırıldı]**
- **Geometrik Dizi Nedir? Özellikleri ve Formülleri: [geçersiz URL kaldırıldı]**
- **https://www.derspresso.com.tr/matematik/dizi/geometrik**

Aritmetik Dizi Nedir?

Aritmetik dizi, ardışık terimlerinin farkı sabit olan bir sayı dizisidir. Bu sabit sayıya **ortak fark** denir.

Örnek:

- 1, 4, 7, 10, 13, ... dizisi, ortak farkı 3 olan bir aritmetik dizidir.
- 5, 2, -1, -4, -7, ... dizisi, ortak farkı -3 olan bir aritmetik dizidir.

Aritmetik Dizinin Özellikleri

- Aritmetik dizide ilk terim ve ortak fark bilinirse, dizinin tüm terimleri hesaplanabilir.
- Aritmetik dizinin n. terimi **a_n = a_1 + d(n-1)** formülüyle hesaplanır. Burada:
    - **a_n**: n. terim
    - **a_1**: İlk terim
    - **d**: Ortak fark
    - **n**: Terimin sırası
- Aritmetik dizinin n teriminin toplamı **S_n = n/2 * (a_1 + a_n)** formülüyle hesaplanır. Burada:
    - **S_n**: n teriminin toplamı
    - **n**: Terim sayısı
    - **a_1**: İlk terim
    - **a_n**: n. terim

Aritmetik Dizinin Kullanım Alanları

Aritmetik diziler, matematik, fizik, mühendislik ve finans gibi birçok alanda kullanılır.

Bazı kullanım alanları:

- Hız ve ivme hesaplamaları
- Hareket modelleri
- Diferansiyel denklemler
- Olasılık ve istatistik

Aritmetik Dizi Örnekleri

- Bir araba saatte 80 km hızla gidiyor ve her saat 10 km daha hızlanıyorsa, bir saat sonra 90 km/saat, iki saat sonra 100 km/saat, üç saat sonra 110 km/saat ve bu şekilde devam edecektir. Bu hız, ortak farkı 10 km/saat olan bir aritmetik dizi oluşturur.
- Bir binanın her katı 3 metre yüksekliğindedir. Bu durumda, birinci kat 3 metre, ikinci kat 6 metre, üçüncü kat 9 metre ve bu şekilde devam edecektir. Bu yükseklik, ortak farkı 3 metre olan bir aritmetik dizi oluşturur.

Aritmetik Dizi Hakkında Daha Fazla Bilgi

Aritmetik diziler hakkında daha fazla bilgi edinmek için şu kaynaklara bakabilirsiniz:

- **Aritmetik dizi - Vikipedi: [geçersiz URL kaldırıldı]**
- **Aritmetik Dizi Nedir? Özellikleri ve Formülleri: [geçersiz URL kaldırıldı]**
- **https://www.derspresso.com.tr/matematik/dizi/aritmetik**

Python programlama dilinde elemanları 1'den başlayarak 20'ye kadar 3'er artarak ilerleyen bir liste oluşturmak için aşağıdaki kodu kullanabilirsiniz:

```
# 1'den 20'ye kadar 3'er artarak ilerleyen bir liste oluşturmak

liste = []
for i in range(1, 21, 3):
    liste.append(i)

print(liste)
```

Bu kod, önce boş bir liste oluşturur. Ardından, 1'den 20'ye kadar 3'er artarak ilerleyen bir döngü kullanarak, her sayıyı listeye ekler. Son olarak, listeyi yazdırır.

Çıktı:

```
[1, 4, 7, 10, 13, 16, 19]
```

Alternatif olarak, range() fonksiyonunun üçüncü parametresini kullanarak da listeyi oluşturabilirsiniz:

```
liste = list(range(1, 21, 3))

print(liste)
```

Bu kod da aynı sonucu verecektir.

Çıktı:

```
[1, 4, 7, 10, 13, 16, 19]
```

Matematiği kullanarak da bu işlemi yapmak için iki farklı yöntem kullanabilirsiniz:

1. Aritmetik Dizi Formülü Kullanarak:

Aritmetik dizinin n. terimini hesaplamak için aşağıdaki formülü kullanabilirsiniz:

```
a_n = a_1 + d(n-1)
```

Burada:

- a_n: n. terim
- a_1: İlk terim
- d: Ortak fark
- n: Terimin sırası

Bu problemde, ilk terim a_1 = 1, ortak fark d = 3 ve n. terim n = 20'dir. Bu değerleri formüle yerleştirirsek:

```
a_20 = 1 + 3(20-1) = 1 + 57 = 58
```

Bu, 20. terimin 58 olduğunu gösterir. Aynı formülü kullanarak, diğer terimleri de hesaplayabilirsiniz.

2. Toplam Formülü Kullanarak:

Aritmetik dizinin ilk n teriminin toplamını hesaplamak için aşağıdaki formülü kullanabilirsiniz:

```
S_n = n/2 * (a_1 + a_n)
```

Burada:

- S_n: n teriminin toplamı
- n: Terim sayısı
- a_1: İlk terim
- a_n: n. terim

Bu problemde, terim sayısı n = 20, ilk terim a_1 = 1 ve son terim a_20 = 58'dir. Bu değerleri formüle yerleştirirsek:

```
S_20 = 20/2 * (1 + 58) = 10 * 59 = 590
```

Bu, ilk 20 terimin toplamının 590 olduğunu gösterir. Bu toplamı kullanarak, listedeki herhangi bir terimin değerini hesaplayabilirsiniz.

Örnek:

5. terimin değerini bulmak için:

```
a_5 = S_5 - S_4 = (5/2 * (1 + 16)) - (4/2 * (1 + 13)) = 40 - 32 = 8
```
Bu, 5. terimin 8 olduğunu gösterir.

Matematiksel modeli kullanarak Python'da 1'den 20'ye kadar 3'er artarak ilerleyen bir liste oluşturmak için iki farklı kod örneği verilmiştir:

1. Aritmetik Dizi Formülü Kullanarak:

```
def aritmetik_dizi(n, a_1, d):
  """
  Aritmetik dizinin n. terimini hesaplar.

  Parametreler:
    n: Terimin sırası
    a_1: İlk terim
    d: Ortak fark

  Döndürülen değer:
    n. terim
  """
  return a_1 + d * (n - 1)

# İlk terim
a_1 = 1

# Ortak fark
d = 3

# Terim sayısı
n = 20

# 20. terimi hesapla
a_20 = aritmetik_dizi(n, a_1, d)

print(f"20. terim: {a_20}")

# Diziyi oluştur
liste = []
for i in range(1, n + 1):
  liste.append(aritmetik_dizi(i, a_1, d))

print(f"Liste: {liste}")
```

2. Toplam Formülü Kullanarak:

```python
def aritmetik_dizi_toplam(n, a_1, a_n):
  """
  Aritmetik dizinin ilk n teriminin toplamını hesaplar.

  Parametreler:
    n: Terim sayısı
    a_1: İlk terim
    a_n: n. terim

  Döndürülen değer:
    İlk n teriminin toplamı
  """
  return n/2 * (a_1 + a_n)

# İlk terim
a_1 = 1

# Son terim
a_20 = 58

# Terim sayısı
n = 20

# İlk 20 terimin toplamını hesapla
toplam = aritmetik_dizi_toplam(n, a_1, a_20)

print(f"İlk 20 terimin toplamı: {toplam}")

# Diziyi oluştur
liste = []
for i in range(1, n + 1):
  # Her terimi hesaplamak için toplam formülünü kullan
  a_i = aritmetik_dizi_toplam(i, a_1, a_i)
  liste.append(a_i)

print(f"Liste: {liste}")
```

Her iki kod da aynı sonucu verecektir. Hangi kodu kullanacağınız, kişisel tercihinize ve kodunuzun geri kalanına bağlıdır.

Vikipedi
Özgür Ansiklopedi

Dizi

Vikipedi, özgür ansiklopedi

Bu madde **hiçbir kaynak içermemektedir.** Lütfen güvenilir kaynaklar ekleyerek madde içeriğinin geliştirilmesine (https://tr.wikipedia.org/w/index.php?title=Dizi&action=edit) yardımcı olun. Kaynaksız içerik itiraz konusu olabilir ve kaldırılabilir.
Kaynak ara: "Dizi" (https://www.google.com/search?as_eq=wikipedia&q=%22Dizi%22) – haber (https://www.google.com/search?tbm=nws&q=%22Dizi%22+-wikipedia) · gazete (https://www.google.com/search?&q=%22Dizi%22+site:news.google.com/newspapers&source=newspapers) · kitap (https://www.google.com/search?tbs=bks:1&q=%22Dizi%22+-wikipedia) · akademik (https://scholar.google.com/scholar?q=%22Dizi%22) · JSTOR (https://www.jstor.org/action/doBasicSearch?Query=%22Dizi%22&acc=on&wc=on) *(Haziran 2016) (Bu şablonun nasıl ve ne zaman kaldırılması gerektiğini öğrenin)*

Başlığın diğer anlamları için Dizi (anlam ayrımı) sayfasına bakınız.

Fonksiyon

$$x \mapsto f(x)$$

tanım ve değer kümesine göre

$X \longrightarrow \mathbf{B}$ $\quad \mathbf{B}^n \longrightarrow \mathbf{B}$

$X \longrightarrow \mathbf{Z} \longrightarrow X$

$X \longrightarrow \mathbf{R} \longrightarrow X$ $\quad \mathbf{R}^n \longrightarrow X$

$X \longrightarrow \mathbf{C} \longrightarrow X$ $\quad \mathbf{C}^n \longrightarrow X$

Sınıflar/özellikler

Sabit · Birim · Doğrusal · Polinom · Rasyonel · Cebirsel · Analitik · Yumuşak · Sürekli · Ölçülebilir · Birebir · Örten · Birebir örten

Yapılar

Kısıtlama · Bileşim · λ · Terslik

Genellemeler

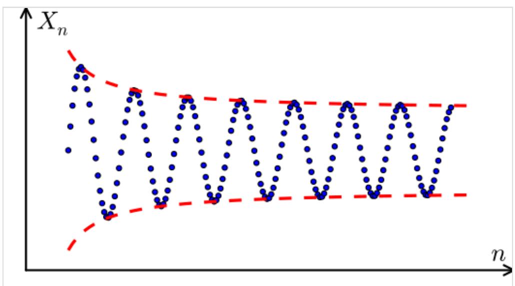
Parçalı · Çokdeğerli · Kapalı

G · T · D (https://tr.wikipedia.org/w/index.php?title=%C5%9Eablon:Fonksiyon&action=edit)

Dizi, bir sıralı listedir. Bir küme gibi, ögelerden (bazen eleman veya terim de denir) oluşur. Sıralı ögelerin sayısına (sonsuz olabilir) dizinin *uzunluğu* denir. Kümenin aksine sıralı ve aynı ögeler dizide farklı konumlarda birkaç kez bulunabilir. Tam olarak bir dizi, tanım kümesi sayılabilen toplam sıralı kümelerden oluşan bir fonksiyon olarak tanımlanabilir. Örneğin doğal sayılar gibi. Diziler bu örnekte olduğu gibi sonlu olabilir. Ya da (2, 4, 6, ...) tüm çift pozitif tam sayılar gibi sonsuz olabilir.

Örneğin, (K, İ, T, A, P), ilk harfi 'K' ve son harfi 'P' olan bir dizidir. Bu dizi, (P, A, T, İ, K) dizisinden farklıdır. Ayrıca (1, 1, 2, 3, 5, 8) dizisindeki 1 sayısı iki farklı konuma sahiptir. Böyle olması dizinin geçerliliğini değiştirmez. Dizi sonlu ya da sonsuz olabilir. Pozitif tam sayılar (1, 2, 3, 4, ...) sonsuz diziye örnek verilebilir. (1, 2, 3, 4) dizisi ise sonlu bir dizidir.

Örnekler ve gösterim



Reel sayılarda sonsuz bir dizi (mavi çizgi). Bu dizi; artan, azalan, yakınsak bir dizi ya da Cauchy dizisi değildir. Ancak hem alttan hem de üstten sınırlıdır.

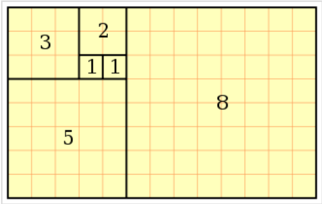
Bir dizi rastgele sıralanmış ögeler listesi olarak düşünülebilir. Dizinin özellikleri kullanılarak, fonksiyonlar, uzaylar ve diğer matematik yapıları ile çalışmak için diziler, matematik disiplinlerinde kullanılabilir. Özellikle diziler, diferansiyel denklemler ve analizde önemli olan seriler için temel teşkil eder.

Diziyi belirtmenin birkaç yöntemi vardır. Bunların bazıları özel dizi türleri için çok kullanışlıdır. Diziyi belirtmenin bir yöntemi de, ögeleri listelemektir. Örneğin; ilk dört tek sayı dizisi (1, 3, 5, 7) formundadır. Bu gösterim, sonsuz diziler için de kullanılabilir. Örneğin pozitif tek tam sayıların sonsuz dizisi, (1, 3, 5, 7, ...) formunda yazılabilir. Listeleme, sonsuz diziler için en kullanışlı yöntemdir. Burada bir örüntü kullanılır. Böylece ilk birkaç öge kolayca fark edilebilir. Diğer yöntemlerden örneklerden sonra bahsedilecektir.

Önemli örnekler

Birçok önemli tam sayı dizisi vardır. Asal sayılar, 1'den büyük fakat 1 ve kendilerinden başka bölenleri olmayan doğal sayılardır. Bunlar kendi sırasına göre dizilirse, (2,3,5,7,11,13,17,...) dizisi elde edilir. Asal sayılarla çalışmak, matematik ve özellikle sayılar teorisi için önemlidir.

Fibonacci dizisi, her sayının kendinden önceki sayı ile toplanması sonucu oluşan bir sayı dizisidir. İlk iki öge ya 0 ile 1 ya da 1 ile 1'dir. Böylece (0,1,1,2,3,5,8,13,21,34,...) dizisi elde edilir.



Kenar uzunlukları ardışık Fibonacci sayıları olan kareler

Dizilere diğer önemli örnekleri, rasyonel sayılar, reel sayılar ve karmaşık sayılar verilebilir. (.9,.99,.999,.9999,...) dizisi 1'e yaklaşır. Her reel sayı, rasyonel sayılar dizisinin limiti olarak yazılabilir. Örneğin, (3,3.1,3.14,3.141,3.1415,...) dizisinin limiti, π olarak yazılabilir. Daha genel bir ifade ile herhangi bir reel sayı ondalıklar dizisinin limiti olarak yazılabilir. π için, (0.9,0.99,...) dizisinde olduğu gibi herhangi bir ondalık örüntüsü yoktur.

İndisleme

Örüntünün kolayca gösterilemediği durumlarda veya pi sayısında olduğu gibi rakamlarında herhangi bir örüntü yoksa, diziler için başka gösterimler kullanılabilir. Bu bölümde doğal sayılar alt kümesinde bulunan diziler için kullanılan gösterimlerden bahsedilmiştir. Diğer sayılabilir indis kümelerinin genelleştirmeleri için aşağıdaki bölüme bakın.

Bir dizinin terimleri (veya ögeleri) genellikle tek bir değişkenle ifade edilir. Dizideki herhangi bir a_n ögesindeki *n indisi*, dizinin *n*. ögesidir.

$$\begin{array}{rr} a_1 \leftrightarrow & \text{1. terim} \\ a_2 \leftrightarrow & \text{2. terim} \\ a_3 \leftrightarrow & \text{3. terim} \\ \vdots & \vdots \\ a_{n-1} \leftrightarrow & \text{(n-1). terim} \\ a_n \leftrightarrow & \text{n. terim} \\ a_{n+1} \leftrightarrow & \text{(n+1). terim} \\ \vdots & \vdots \end{array}$$

İndisleme gösterimi, bir diziyi soyut olarak ifade etmek için kullanılır. Ayrıca (terimin konumunu belirten) *n* indisli terimlerden oluşan diziler için bu, doğal bir gösterimdir. Örneğin ilk on tam kare olan sayılar için dizi şöyle yazılabilir:

$$(a_1, a_2, \ldots, a_{10}), \qquad a_k = k^2.$$

Bu, (1,4,9,...100) dizisini ifade eder. Bunun daha da basit gösterimi şöyledir:

$$(a_k)_{k=1}^{10}, \qquad a_k = k^2.$$

Burada {k=1} alt indisi ve 10 üst indisi, *k* = 1, 2, ..., 10 için bu dizinin terimlerinin a_k olduğunu ifade eder.

Diziler herhangi bir tam sayıdan başlayacak veya bitecek şekilde indislenebilir. Belirli bir *k* değerinden başlayarak tüm tam sayıları kapsayan diziyi ifade etmek için sonsuz sembolü (∞) üst indis olarak çok sık kullanılır. Tüm pozitif tam kareler şöyle ifade edilebilir:

$$(a_k)_{k=1}^{\infty}, \qquad a_k = k^2.$$

Bunun gibi indisleme sayıları kümesinin anlaşılması için analizde alt indisler ve üst indisler sıkça kullanılır. Bir keyfi dizi için a_k basit yazımı kullanılabilir. Analizde *k* 1'den ∞'a kadar olan dizi ele alınarak *k* anlaşılabilir. Fakat dizi çoğunlukla sıfırdan başlayarak indislenir, şöyle ki:

$$(a_k)_{k=0}^{\infty} = (a_0, a_1, a_2, \ldots).$$

Bazı durumlarda dizinin terimleri, örüntüsü kolayca anlaşılabilen bir tam sayılar dizisi ile ilgilidir. Bu durumda, ilk birkaç soyut terim listelenerek indis kümesinin geri kalan terimlerinin ne olduğu anlaşılabilir. Örneğin, tek sayılar aşağıdaki gösterimlerden herhangi biriyle ifade edilebilir.

1. $(1, 9, 25, \ldots)$
2. $(a_1, a_3, a_5, \ldots), \qquad a_k = k^2$
3. $(a_{2k-1})_{k=1}^{\infty}, \qquad a_k = k^2$
4. $(a_k)_{k=1}^{\infty}, \qquad a_k = (2k-1)^2$
5. $((2k-1)^2)_{k=1}^{\infty}$

Diğer taraftan, eğer 3., 4 ve 5. gösterimlerdeki indisleme kümesinin doğal sayılar olduğu anlaşılabilirse alt indisler ve üst indisler gösterilmeyebilir.

Sonuçta diziler, bir küme alt indisle birlikte yazmayı en genel biçimde ifade edebilir, şöyle ki:

$$(a_k)_{k \in \mathbf{N}}$$

İndisle ifade edilen değerler kümesine **indis kümesi** denir. Genellikle a_k ögelerinin dizilişi, indisleme kümesindeki terimlerin dizilişi ile belirtilir. N indis kümesi olursa, a_k+1 terimi, a_k teriminden sonra dizilir. Dolayısıyla (k+1) alt indisi, doğrudan k alt indisinden sonra gelir.

Tanım ve temel özellikler

Matematikte diziler çok farklı yöntemlerle (örn; tam dizi) gösterilebilir. Aşağıda sadece bazı gösterimlerden bahsedilmiştir.

Tanım

Bir dizi genellikle tanım kümesi sayılabilen toplam sıralı kümelerden oluşan bir fonksiyon olarak tanımlanabilir. Reel analizde bir dizi, **N** (veya ℕ) doğal sayılarından **R** (veya ℝ) reel sayılarına kadar olan alt kümedeki bir fonksiyondur. Başka bir ifade ile dizi, $f(n)$: **N** → **R** haritasıdır. Daha önce ifade edilen gösterimleri doğrulamak için, $a_n = f(n)$ veya yalnızca a_n: **N** → **R** yazılabilir.

Karmaşık analizde dizi, **N** doğal sayılarından **C** (veya ℂ veya ℂ) karmaşık sayılarına kadar olan bir harita olarak tanımlanır. Topolojide dizi, genellikle doğal sayılar alt kümesinden topolojik uzayına kadar olan fonksiyonları tanımlar.

Sonlu ve sonsuz

Bir dizinin **uzunluğu**, dizideki terimlerin sayısı ile belirlenir.

n sonlu uzunluklu bir dizi, n demetli olarak da adlandırılır. Hiçbir ögesi olmayan ( ) **boş dizi** de bir sonlu dizidir. Normalde *sonsuz dizi* kavramı, bir yönde sonsuz olan bir diziyi ifade ederken; *sonlu dizi*, diğer yönde birinci ögesi olan, fakat son ögesi olmayan bir dizidir. Her iki yönde de ya birinci ya da sonuncu ögesi olan sonsuz dizi, *çift sonsuz dizi*, veya *iki yönlü sonsuz dizi* olarak adlandırılır. Örneğin; **tüm** tam sayılardan oluşan bir kümedeki fonksiyonun dizisinin tüm (..., −4, −2, 0, 2, 4, 6, 8...) çift tam sayıları, çift sonsuzdur. Bu dizi, $(2n)_{n=-\infty}^{\infty}$ olarak ifade edilemez. Sonuçta, bir çift sonsuz dizi **Z** deki bir harita olarak tanımlanabilir.

Tek sonsuz dizi, R[**N**] doğal sayılarının yarıgrup halkasının; çift sonsuz dizi ise, R[**Z**] tam sayılarının Grup halkasının ögeleri olarak ifade edilebilir. Bu görüş, dizilerin Cauchy çarpımında kullanılır.

Artma ve azalma

Bir dizinin her bir terimi, bir önceki terimden büyük eşitse, buna *monotonik artma* denir. $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ dizisinde tüm $n \in$ **N** oluyorsa, dizi şöyle yazılabilir: $a_n \leq a_{n+1}$. Eğer peşpeşe gelen terimlerin her biri, önceki terimden büyükse (>), "dizi **tam monotonik artıyor'" denir. Eğer peşpeşe gelen terimlerin her biri, önceki terimden küçük eşit ise, "dizi** monotonik azalıyor'" denir. Eğer peşpeşe gelen terimlerin her biri, önceki terimden küçükse "dizi **tam monotonik azalıyor'" denir. Eğer bir dizi ya artıyor ya da azalıyorsa, "dizi** monotondur'" denir. Bu monotonik fonksiyonun genel kavramının özel durumudur.

Azalmıyor ve **artmıyor** kavramları sırasıyla *tam artıyor* ve *tam azalıyor* kavramları ile karışmaması için, bunlar yerine sırasıyla *artıyor* ve *azalıyor* kavramları sıkça kullanılır.

Sınırlar

Eğer (a_n) reel sayılar dizisi, belirli bir terimden sonraki tüm terimleri M reel sayısından daha küçük ise, "'üstten sınırlı **dizi" denir. Bunun anlamı, s, tüm n büyüktür N ve bazı M ve N çiftleri için, $a_n \leq M$ olur. Burada M, *üst sınır* olarak adlandırılır. Benzer şekilde, tüm n büyüktür n için bazı reel sayılar m, $a_n \geq m$ olur. Buna "'alttan sınırlı** dizi" denir. Burada m *alt sınır* olarak adlandırılır. Eğer dizi hem alttan sınırlı hem de üstten sınırlı ise diziye **sınırlı** denir.

Diğer dizi türleri

Verilen bir dizinin bazı terimlerinin silinmesi, geri kalan terimlerin konumlarını dağıtmayacak forma dönüştüren diziye **altdizi** denir. Örneğin (2, 4, 6, ...) çift tam sayılar dizisi, (1, 2, 3,4, ...) pozitif tam sayılar dizisinin bir altdizisidir. Diğer terimleri silindiğinde, geri kalanları konumları değişmiş, fakat öncelik sıraları değişmemiştir.

Bazı diğer dizi türlerini şu şekilde kolayca tanımlanabilir:

- Bir **tam sayı dizisi**, terimleri tam sayı olan bir dizidir.
- Bir **polinom dizi**, terimleri polinom olan bir dizidir.
- Eğer n ve m aralarında asal ise, tüm n ve m çiftleri için $a_{nm} = a_n a_m$ oluyorsa, pozitif tam sayı dizisine, çarpan olarak adlandırılır. Başka bir ifade ile tüm n için eğer $a_n = na_1$ oluyorsa, çarpan dizidir. Ayrıca *çarpanlı* Fibonacci dizisinin tekrarlı ilişkisi de bir dizidir, şöyle ki: $a_n = a_{n-1}\, a_{n-2}$.

Limitler ve yakınsaklık

Ana madde: Dizinin limiti

Dizinin en önemli özelliklerinden biri de *yakınsaklık*tır. En basit anlamda eğer bir dizinin limiti varsa, "dizi yakınsaktır" denir. Yani bir (tek sonlu dizinde n çok çok büyük olduğunda L limite yaklaşırsa, "dizinin limiti vardır" denir. Bir (a_n) soyut dizisinde $n \to \infty$ (n sonsuza giderken) a_n, L ye yakınsar.

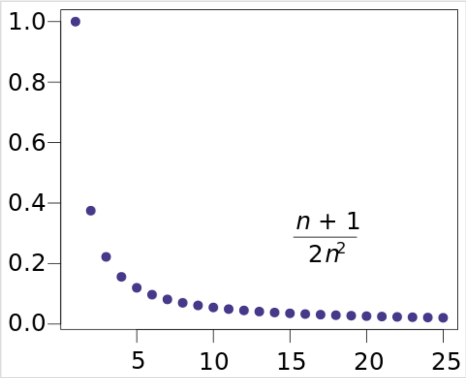
$$\lim_{n\to\infty} a_n = L.$$

Bunun tam ifadesi, eğer bir L limiti varsa dizi yakınsaktır. L yeterince büyük olursa, geri kalan a_n'ler L ye yakınsar.

Bir dizi eğer bazı limitlere yakınsıyorsa, dizi **yakınsaktır**, aksi takdirde **ıraksaktır**.

Bir (x_n) dizisi **sonsuza yaklaşıyorsa**, $x_n \to \infty$ veya $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$ şeklinde yazılır.

Eğer bir dizi sonsuza yaklaşıyorsa veya eksi sonsuz ise, dizi ıraksaktır ve $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ şeklinde yazılır.



(a_n) yakınsak dizisinin grafiği mavi ile gösteriliyor. n artarken dizinin limitinin sıfıra yaklaştığı görülebiliyor.

Yakınsaklığın tanımı

$a_n \in \mathbf{R}$ olursa ve $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ dizi formunda yazılabiliyorsa, bu diziyi $\mathbf{N}$ indis kümesi ile şöyle yazabiliriz: (a_n). Bu diziler gerçel analizde sıkça kullanılır.

Uygulamalar ve özellikler

Reel sayılardaki dizilerin yakınsaklığı ve tek taraflı limit önemli sonuçlar aşağıda gösterilmiştir:

Reel dizilerin limitlerinin diğer bazı önemli özellikleri şunlardır:

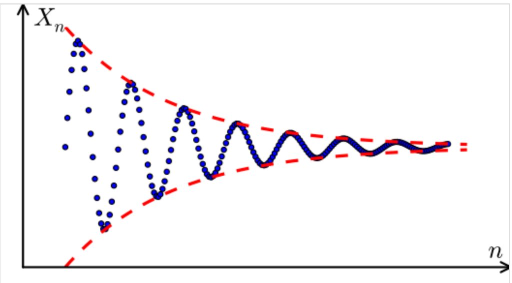
- Bir dizinin limiti eşsizdir.
- $\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n$
- $\lim_{n\to\infty} ca_n = c \lim_{n\to\infty} a_n$
- $\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = (\lim_{n\to\infty} a_n)(\lim_{n\to\infty} b_n)$
- $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}$ (Eğer $\lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$ ise)
- $\lim_{n\to\infty} a_n^p = \left[\lim_{n\to\infty} a_n\right]^p$
- Tüm n'ler bazı N'lerden daha büyük ise ve $a_n \leq b_n$ oluyorsa, $\lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n$ olur
- (Sıkıştırma teoremi) Tüm $n > N$ için $a_n \leq c_n \leq b_n$ oluyorsa ve $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = L$ ise, $\lim_{n\to\infty} c_n = L$ olur.
- Eğer bir dizi sınırlandırılmış ve monotonik ise dizi yakınsaktır.
- Bir dizi yakınsak ise ancak ve ancak tüm alt dizileri de yakınsaktır.

Cauchy dizileri

Ana madde: Cauchy dizisi

Cauchy dizisi, terimleri rastgele yakın olan bir dizidir. Cauchy dizisi kavramı, metrik uzayında, özellikle reel analizde ortaya çıkar.

> Bir dizi yakınsıyorsa ancak ve ancak Cauchy dizisidir.



Bir (x_n) Cauchy dizisinin grafiği mavi ile gösteriliyor. x_n, n ye karşıdır. Dizi bir limit noktasına yakınsıyor. Reel sayılarda her Cauchy dizisi bazı limitlere yakınsar.

Seriler

Ana madde: Seri

Seri, bir dizinin terimlerinin toplamıdır. Bir tek taraflı dizinin ilk N terimi toplamı, başka bir dizinin N. terimi olan forma *seri* denir. Burada (a_n) dizisinin N serisi, (S_N) dizisini oluşturur, şöyle ki:

$$\begin{array}{ll} S_1 = & a_1 \\ S_2 = & a_1 + a_2 \\ S_3 = & a_1 + a_2 \quad + a_3 \\ \vdots & \quad \vdots \\ S_N = & a_1 + a_2 \quad + a_3 + \cdots \\ \vdots & \quad \vdots \end{array}$$

Serinin n. terimini şöyle yazabiliriz:

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} a_n.$$

Yakınsaklık, seriye aktarmak (kısmi toplamlar dizisi) ve özellikler gibi kavramları kullanırken asıl bahsedilmek istenen dizilerin karakterleridir (son örnekteki (a_n) gibi). Sonsuz bir diziden elde edilen bir sonsuz serinin eğer limiti varsa, şöyle ifade edilir:

$$\lim_{N\to\infty} S_N = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Otorite kontrolü	BNE: XX533577 (http://catalogo.bne.es/uhtbin/authoritybrowse.cgi?action=display&authority_id=XX533577) · BNF: cb121105993 (https://catalogue.bnf.fr/ark:/12148/cb121105993) (data) (https://data.bnf.fr/ark:/12148/cb121105993) · GND: 4017790-7 (https://d-nb.info/gnd/4017790-7) · LCCN: sh85120145 (https://id.loc.gov/authorities/subjects/sh85120145) · NKC: ph124397 (https://aleph.nkp.cz/F/?func=find-c&local_base=aut&ccl_term=ica=ph124397&CON_LNG=ENG) · NLI: 987007531611205171 (http://olduli.nli.org.il/F/?func=find-b&local_base=NLX10&find_code=UID&request=987007531611205171)