KÜMELER

İÇİNDEKİLER

- Küme Kavramı
- Kümelerin Değişik Biçimlerde İfadesi
- Kümeler Üzerinde İşlemler

HEDEFLER

- Bu üniteyi çalıştıktan sonra;
  - Küme kavramını tanımlayabilecek ve kümeleri yazabilecek,
  - Elemanları verilen kümeleri ifade edebilecek,
  - Kümeler üzerinde işlemler yapabilecek ve kümeler ile ilgili problemleri çözebileceksiniz.

Atatürk Üniversitesi
Açıköğretim Fakültesi

MATEMATİK I

Doç. Dr. İsa YILDIRIM

ÜNİTE

1

Küme Kavramı

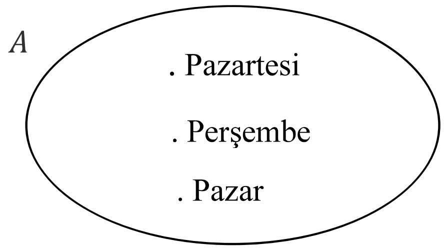
- ***Kümenin tanımı***
- ***Kümelerin gösterilişi ve bazı küme örnekleri***

Kümelerin Değişik Biçimlerde İfadesi

- ***Kümelerin gösterim yöntemleri***

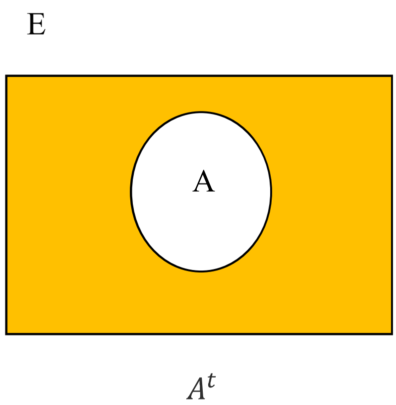
  (liste yöntemi, ortak özellik yöntemi

  ve Venn şeması yöntemi)



Kümeler Üzerinde İşlemler

- ***Kümelerin birleşim, arakesit, alt küme, fark, tümleyen tanımları***
- ***Evrensel küme ile ilgili özellikler***
- ***Birleşim ve kesişim ile ilgili özellikler***
- ***Kartezyen Çarpımın Özellikleri***



GİRİŞ

Doğada her zaman var olan ve uzun yıllar boyunca kullanılan küme kavramının matematiksel tanımının yapılması ve isimlendirilmesi 19. yüzyılda olmuştur. Sayılar, denklemler ve fonksiyonlar üzerinde çok sayıda çalışmalar yapılmasına rağmen bunların belirli topluluklarının küme olarak isimlendirilmesi uzun bir zaman almıştır. Dolayısıyla matematik dilinde birlik sağlama ihtiyacı, geçmiş yüzyıllar boyunca matematikçileri meşgul eden durumlardan biri olmuştur. Bu birliğin kümelerle sağlanabileceğini ifade eden ve 1845-1918 yılları arasında yaşamış ünlü Alman matematikçi Georg Cantor'dur. Zaten sonlu ve sonsuz kümeleri oluşturmak amacında olan Cantor, bu amaca ilk ulaşanlardan biriydi. 1874 yılında yayımlanan Cantor'un makalesi, kümeler kuramının ortaya çıkışında önemli bir adım olarak görülür. Meşhur Alman matematikçisi Cantor, tüm matematik çalışmalarında ve problemlerinde kullanılan nesnelerin kendi aralarında belirli özelliklere göre gruplanabileceğini, bu durumda araştırma veya problemin anlaşılabilirliğini ve çözüme yönelik işlemlerin daha kolay yapılabileceğini fark etmiştir. Buradaki "nesne" soyut ya da somut bir kavramı ifade eder. Bu bir sayı, şekil, harf veya farklı bir kavram olabilir. Bolzano, Russell, Zermela, Fraenkel, Von Neumann, Bernays ve Gödel gibi matematikçiler kümeler kuramının geliştirilmesine önemli katkılarda bulunmuşlardır.

Kümeler kuramı genellikle değişik formal disiplinlerin içinde tanımlanabildiği bir çalışma alanı oluşturur. İnsanın soyut düşünme çabasında, mantıksal ilişkiler oluştururken, parça-bütün bağlantılarını anlama uğraşında, kümeler kuramının önemli katkıları olabilir. Bugün, kümeler kuramı, daha yetkin, daha işlevsel bir yapıya kavuşturulmaya çalışılırken, mühendislikten iktisada ve yapay zekâ çalışmalarına dek geniş bir uygulama alanı bulabilmektedir.

Küme kavramı ile ilgili çalışmalar günümüzde hâlâ devam etmektedir.

KÜME KAVRAMI

Günlük hayatımızda ve bilimsel anlamda kullandığımız tanımsız kabul edilen bazı kavramlar vardır. Nokta, doğru, düzlem ve küme gibi kavramlar bunlardan birkaçıdır. Her ne kadar bunlar tanımsız kabul edilse de matematiksel olarak bu kavramları ifade etmek gerekir. Dolayısıyla kümenin tanımı aşağıdaki gibi verilebilir.

Tanım 1.1. İyi tanımlanmış, birbirinden farklı nesnelerin veya şekillerin oluşturduğu topluluğa küme denir.

Buradaki *iyi tanımlanmış* ifadesiyle; kimi, bazı, birkaçı gibi kişisel ifadeleri içermeyen, herkes tarafından bilinen ve belirli olan varlık demektir. Kümelerin hangi elemanlardan oluştuğu şüpheye düşürmeden açık bir şekilde belirtilmelidir.

Örneğin, "bazı çift sayılar" veya "Atatürk Üniversitesindeki bazı uzun boylu öğrenciler" gibi ifadeler bir küme oluşturmaz. Çünkü bazı çift sayılar derken hangi sayıların bu gruba dâhil olup olmadığı kesin olarak belirlenemez. Diğer örnekte de hangi öğrencilerden bahsedildiği açıkça belirtilmemiştir. Yani bu iki ifade de iyi tanımlı değildir.

Yukarıdaki örnekler, "5 ile 35 arasındaki çift sayılar" veya "Atatürk Üniversitesindeki boyu 1.50 m'den uzun öğrenciler" şeklinde değiştirilirse bunlar birer küme belirtir. Çünkü 5 ile 35 arasındaki çift sayılar yazılabilir ve Atatürk Üniversitesindeki boyu 1.50 m'den uzun öğrenciler belirlenebilir.

Bir kümeyi oluşturan nesnelere veya sembollere kümenin elemanları denir. Kümeler genellikle $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, \mathrm{X}$ *... gibi büyük harflerle, kümenin elemanları ise* $\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c}, \mathrm{x}$ *... gibi küçük harflerle gösterilir [5].*

Bir elemanın verilen bir kümeye ait olup olmadığını belirlemek için $\in$ veya $\notin$ sembolleri kullanılır. Örneğin, bir a elemanı A kümesinin elemanı ise $a \in A$ şeklinde yazılır ve "a eleman A" veya "a, A kümesinin elemanıdır" şeklinde okunur. Benzer şekilde, bir b elemanı A kümesinin elemanı değil ise $b \notin A$ şeklinde yazılır ve "b eleman değil A" veya "b, A kümesinin elemanı değildir." şeklinde okunur.

Bir A kümesinin eleman sayısı gösterilirken genellikle $s(A)$ veya $n(A)$ sembollerinden biri kullanılır. Bu kitapta $s(A)$ sembolü kullanılacaktır.

Boş kümenin eleman sayısı 0'dır (sıfır).

Tanım 1.2. Elemanı olmayan kümeye boş küme denir. Boş küme $\emptyset$ veya $\{\ \ \}$ sembollerinden biri ile gösterilir.

Diğer taraftan $\{\emptyset\}$ kümesi boş küme değildir. Çünkü bu kümenin bir tane elemanı vardır ve bu eleman da $\emptyset$'dir.

KÜMELERİN GÖSTERİMLERİ

Kümeler gösterilirken aşağıdaki üç yöntemden biri kullanılır.

- Liste yöntemi
- Ortak özellik yöntemi
- Venn şeması yöntemi

Şimdi bu yöntemler sırasıyla aşağıda verilecektir.

Liste Yöntemi

Kümenin elemanları, küme parantezine alınarak ve elemanlar virgülle birbirinden ayrılarak gösterilir. Küme parantezi "$\{\ \ \}$" şeklindedir.

Örnek

•Haftanın P harfi ile başlayan günlerinin kümesi A olsun. Bu küme liste yöntemi ile;

$$A = \{\text{Pazartesi}, \text{Perşembe}, \text{Pazar}\}$$

şeklinde gösterilir.

Ortak Özellik Yöntemi

Bir kümenin tüm elemanlarının sağladığı ortak özellikler varsa bu özellikler yardımıyla küme gösterilebilir. Küme yazılırken "öyle ki" anlamına gelen ":" veya "|" sembolü kullanılarak elemanların sağladığı özellikler parantez içinde yazılır. Örneğin, k özelliğine sahip elemanların kümesine A dersek

$$A = \{x \colon x, k \text{ özelliğine sahiptir}\}$$

veya

$$A = \{x | x, k \text{ özelliğine sahiptir}\}$$

şeklinde yazılır. Bu iki küme "x öyle ki x, k özelliğine sahiptir" veya "k özelliğine sahip x elemanlarının kümesi" şeklinde okunur.

Örnek

- Haftanın P harfi ile başlayan günlerinin kümesi A olsun. Bu küme ortak özellik yöntemi ile

$$A = \{x \colon x, \text{haftanın P harfi ile başlayan günleri}\}$$

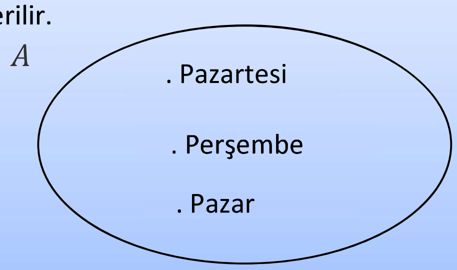
şeklinde gösterilir.

Venn Şeması Yöntemi

Kümenin elemanları kapalı bir eğri (daire, kare, dikdörtgen vb.) içine yanlarına nokta konularak yazılır.

Örnek

- Haftanın P harfi ile başlayan günlerinin kümesi, venn şeması ile aşağıdaki gibi gösterilir.



KÜMELER ÜZERİNDE İŞLEMLER

Bu bölümde bir ya da daha fazla küme üzerinde tanımlanan bazı işlemler verilecektir.

Tanım 1.3. Aynı elemanlardan oluşan kümelere eşit kümeler denir ve "=" sembolü kullanılarak gösterilir.

Örneğin, A ve B kümeleri eşit ise $A = B$ şeklinde, bu kümeler eşit değilse $A \neq B$ şeklinde gösterilir.

Küme içerisindeki elemanların kendi aralarında yer değiştirmesi, kümeyi değiştirmez.

Örnek

•$A = \{2, 4, 6\}$ ve $B = \{6, 2, 4\}$ kümeleri aynı elemanlardan oluştukları için eşit kümelerdir ve $A = B$ dir.

Tanım 1.4. A ve B herhangi iki küme olsun. Eğer A kümesinin her elemanı B kümesinin de bir elemanı oluyorsa A ya B nin alt kümesi denir ve bu $A \subseteq B$ ile gösterilir. "A alt küme B" diye okunur.

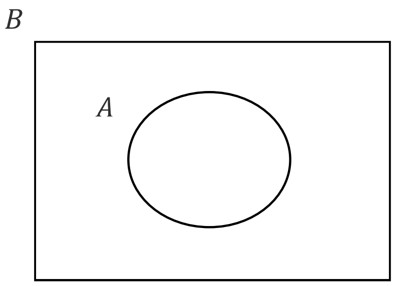
Aynı zamanda bu ifade $B \supseteq A$ şeklinde de yazılabilir ve "B kapsar A" diye okunur.

Eğer $A \subseteq B$ ve $A \neq B$ ise A ya B nin *öz (has) alt kümesi* denir ve $A \subset B$ şeklinde gösterilir. Diğer bir deyişle, bir kümenin alt kümelerinde kümenin kendisi de bulunur. Kümenin kendisi hariç alt kümeleri, bu kümenin öz alt kümelerini oluşturur.

Bu kitapta, karışıklığı önlemek için hem alt küme hem de öz alt küme gösterimlerinde "$\subset$" simgesi kullanılacaktır. Yani,

A kümesi B kümesinin alt kümesi ise $A \subset B$, alt kümesi değilse $A \not\subset B$ sembolü kullanılacaktır.

Yukarıdaki tanım şematik olarak aşağıdaki gibi gösterilebilir.



Şekil 1.1. $A \subset B$ nin şematik olarak gösterilişi

Alt küme ile ilgili aşağıdaki özellikler verilebilir. A, B ve C boş olmayan kümeler olsun. Bu durumda;

- Her A kümesi için $A \subset A$ ve $\emptyset \subset A$,
- $A \subset B$ ve $B \subset A$ ise $A = B$,
- $A \subset B$ ve $B \subset C$ ise $A \subset C$'dir.

Örnek

•$A = \{1, 2, 3, 4\}$ ve $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ kümeleri için A kümesinin her elemanı aynı zamanda B kümesinin de elemanı olduğundan $A \subset B$'dir.

Örnek

•$A = \{a, b\}$ kümesinin tüm alt kümeleri; $\emptyset$, $\{a\}$, $\{b\}$ ve $\{a, b\}$ dir. $\emptyset$, $\{a\}$ ve $\{b\}$ ise A kümesinin öz alt kümeleridir.

Yukarıdaki örnekten aşağıdaki sonuç çıkarılabilir.

Eleman sayısı n *olan bir kümenin alt kümelerinin sayısı* 2^{n} *ve öz alt kümelerinin sayısı ise* $2^{\mathrm{n}} - 1$*'dir.*

Örnek

•$A = \{1, 2, a, b, 9\}$ kümesinin eleman sayısı 5 olduğundan bu kümenin alt kümelerinin sayısı

$$2^5 = 32'\text{dir.}$$

Örnek

•Öz alt kümelerinin sayısı 63 olan bir kümenin eleman sayısını bulunuz.

"⇒" sembolü "ise" anlamına gelir.

Çözüm: Eleman sayısı n olan bir kümenin öz alt kümelerinin sayısı $2^n - 1$ olduğundan

$$2^n - 1 = 63 \Rightarrow 2^n = 64 \Rightarrow n = 6$$

olur.

Tanım 1.5. Üzerinde çalıştığımız en geniş kümeye evrensel küme denir ve E ile gösterilir.

Bu bölümde aksi söylenmedikçe *tüm kümeler* E *evrensel kümenin alt kümesi olarak kabul edilecektir.*

Tanım 1.6. A ve B iki küme olmak üzere;

- A ve B kümelerinden en az birine ait olan elemanların oluşturduğu kümeye A ile B kümelerinin birleşimi denir. Bu küme $A \cup B$ ile gösterilir ve "A birleşim B" diye okunur. Ayrıca bu küme ortak özellik yöntemi ile
$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ veya } x \in B\}$$
şeklinde yazılır.

Ayrık kümeler, ortak hiçbir elemanı olmayan kümelerdir.

- A ve B kümelerinin ortak elemanlarından oluşan kümeye A ve B kümelerinin kesişimi (arakesiti) denir. Bu küme $A \cap B$ ile gösterilir ve "A kesişim B" veya "A arakesit B" diye okunur. Buna göre;
$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ ve } x \in B\}'\text{dir.}$$
Eğer $A \cap B = \emptyset$ ise A ve B kümelerine *ayrık kümeler* denir.

- A kümesinin elemanı olduğu hâlde B kümesinin elemanı olmayan elemanların oluşturduğu kümeye A ve B kümelerinin farkı denir. Bu küme

$A \setminus B$ veya $A - B$ şeklinde gösterilir ve "A fark B" diye okunur. Bu fark kümesi ortak özellik yöntemi ile

$$A \setminus B = \{x : x \in A \text{ ve } x \notin B\}$$

şeklinde yazılır.

- E, evrensel küme olmak üzere, A kümesinde olmayan fakat E 'de olan elemanların oluşturduğu kümeye A kümesinin tümleyeni denir ve A^t veya $E \setminus A$ şeklinde gösterilir. Buna göre;

$$A^t = \{x : x \notin A \text{ ve } x \in E\}\text{'dir.}$$

Örnek

•A ve B kümeleri

$$A = \{1, 2, 3, 4\}, B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

şeklinde veriliyor. Buna göre sırasıyla $A \cup B, A \cap B, A \setminus B$ ve $B \setminus A$ kümelerini bulunuz.

Aynı elemanlar, kümede sadece bir kez yazılmalıdır.

Herhangi bir A kümesi için $(A^t)^t = A$ 'dır [3].

Çözüm: $A \cup B$ kümesi, A veya B kümelerinin elemanlarının tümünden oluşan küme olduğundan;

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} \text{ olur.}$$

$A \cap B$ kümesi, A ve B kümelerinin ortak elemanlarının oluşturduğu küme olduğundan;

$$A \cap B = \{1, 2, 3, 4\} \text{ dür.}$$

$A \setminus B$ kümesi, A kümesine ait olan ve B kümesine ait olmayan elemanlardan oluşan küme olduğundan;

$$A \setminus B = \emptyset\text{'dir.}$$

Benzer şekilde $B \setminus A$ kümesi, B kümesine ait olan ve A kümesine ait olmayan elemanların oluşturduğu küme olduğundan;

$$B \setminus A = \{5, 6, 7, 8\} \text{ olur.}$$

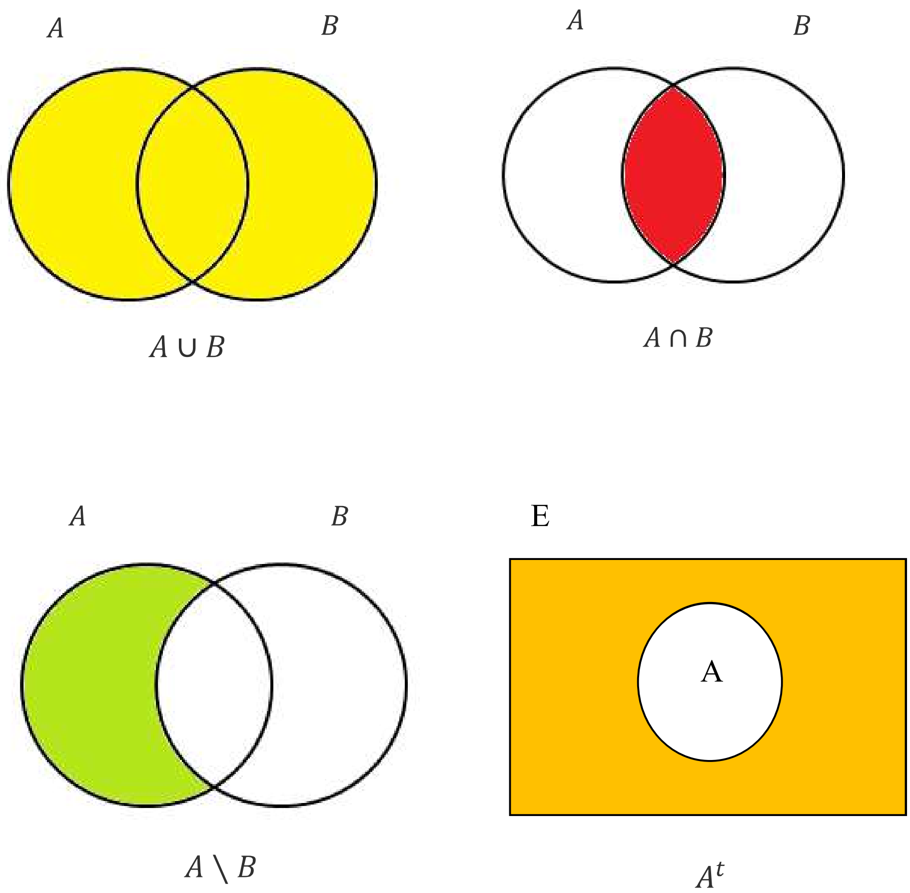
Örnek

•A ve B kümeleri;

$$A = \{1, 2, a, b\}, B = \{3, x, 4, y\}$$

şeklinde veriliyor. $A \cap B = \emptyset$ olduğundan A ve B kümeleri ayrık kümelerdir.

Aşağıdaki şekilde verilen A ve B kümeleri için sırasıyla $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, A^t kümeleri gösterilmiştir.



Şekil 1.2'de verilen A^t kümesi aynı zamanda $E \setminus A$ kümesine eşittir.

Şekil 1.2. $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, A^t kümelerinin venn şeması ıle gösterilişi

Örnek

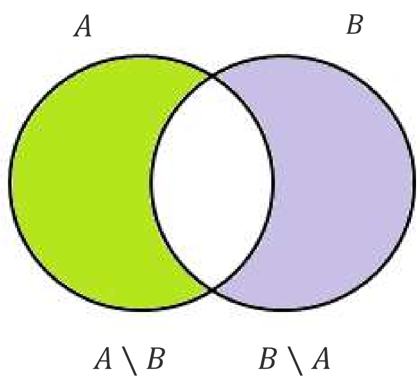
• $E = \{1, 2, 3, 4, a, b, c\}$ ve $A = \{2, 4, c\}$ olmak üzere A^t kümesini bulunuz.

Çözüm: A^t kümesi, A kümesinde olmayan elemanların oluşturduğu küme olduğundan;

$$A^t = \{1, 3, a, b\} \text{ olur.}$$

Tanım 1.7. A ve B kümeleri verilsin. Bu kümelerden birine ait olup diğerine ait olmayan elemanların kümesine A ve B kümelerinin simetrik farkı denir ve $A\Delta B$ ile gösterilir. Bu küme;

$$A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \text{ veya } A\Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) \text{ olarak ifade edilir.}$$



Şekil 1.3. $A\Delta B$ kümesinin şematik olarak gösterilişi

Örnek

•A ve B kümeleri;

$$A = \{1, a, b, c, 3, 5, 7\},\ B = \{1, 2, 3, a, 5, b, 6\}$$

şeklinde veriliyor. Buna göre $A\Delta B$ kümesini bulunuz.

Çözüm: $A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ olduğundan

$$A\Delta B = \{c, 7\} \cup \{2, 6\}$$

$$= \{c, 2, 6, 7\}$$ olur.

$s(A\Delta B) = s(A \setminus B) + s(B \setminus A)$'dır.

Bireysel Etkinlik

- $E = \{1, e, 3, b, 7, 9, k\}, A = \{1, 3, k\}$ ve $B = \{b, 9\}$ kümeleri veriliyor. Buna göre $A \cup B, A \cap B, A \setminus B, B \setminus A$ ve A^t kümelerini bulunuz.
- Bir kümenin alt kümeleri ile öz alt kümelerinin toplam sayısı 127 olduğuna göre bu kümenin eleman sayısını bulunuz.
- $[(A^t)^t \cap A] \cup A$ işleminin sonucu nedir?

Şimdi yukarıda kümeler üzerinde tanımlanan birleşim, kesişim ve tümleyen işlemleri ile ilgili bazı özellikler verilecektir.

Evrensel Küme İle İlgili Özellikler

E bir evrensel küme ve $A, B \subset E$ olsun. Bu durumda aşağıdaki özellikler yazılabilir [1]:

1) $A \cup E = E$ **2)** $A \cap E = A$ **3)** $\emptyset \cup E = E$

4) $\emptyset \cap E = \emptyset$ **5)** $E = A \cup A^t$

Bu özelliklerin doğruluğu ayrıca Şekil 1.2'den de kolayca görülebilir.

Örnek

• $E = \{1,2,3,4,7,9,10,15\}$ ve $A = \{1,4,9,15\}$ kümeleri veriliyor. Buna göre A^t kümesinin eleman sayısı kaçtır?

Çözüm: E evrensel kümesinin eleman sayısı 8 ve A kümesinin eleman sayısı 4 tür. Yani $s(E) = 8$ ve $s(A) = 4$ yazılır. Yukarıdaki 5. özellikten dolayı;

$$s(E) = s(A) + s(A^t)$$

$$8 = 4 + s(A^t)$$

olduğundan $s(A^t) = 4$'tür (veya verilen soruda $A^t = \{2,3,7,10\}$ dur. Dolayısıyla $s(A^t) = 4$ olur).

Birleşim İşlemi İle İlgili Özellikler

A, B ve C kümeleri için aşağıdaki özellikler vardır:

1. $A \cup A = A$
2. $A \cup B = B \cup A$
3. $A \cup \emptyset = A$
4. $A \subset (A \cup B),\ B \subset (A \cup B)$
5. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
6. $s(A \cup B) = s(A) + s(B) - s(A \cap B)$
7. $s(A \cup B \cup C) = s(A) + s(B) + s(C) - s(A \cap B) - s(A \cap C)$

    1. $-s(B \cap C) + s(A \cap B \cap C)$'dir.

Örnek

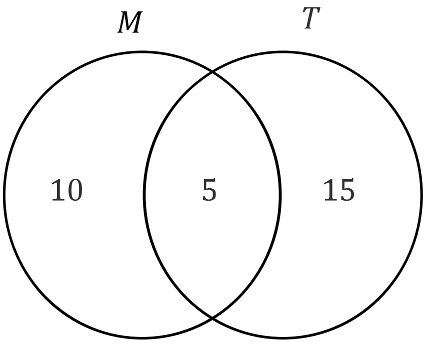
• $A = \{1,2,3,4,5\}$ ve $B = \{3,4,5,6,7\}$ kümeleri veriliyor. Buna göre $A \cup B = \{1,2,3,4,5\} \cup \{3,4,5,6,7\} = \{1,2,3,4,5,6,7\} = B \cup A$ dır.

Örnek

• Bir sınıftaki her öğrencinin Matematik ve Türkçe derslerinin en az birinden geçtiği biliniyor. Bu sınıfta Matematik dersinden geçen 15 öğrenci, Türkçe dersinden geçen 20 öğrenci ve her iki dersten geçen 5 öğrenci olduğuna göre bu sınıftaki öğrenci sayısını bulunuz.

Çözüm: Bu soruyu aşağıdaki şemayı kullanarak çözelim. Matematik dersinden geçen öğrencilerin kümesi M ve Türkçe dersinden geçen öğrencilerin kümesi T olsun. Buna göre;

$s(M) = 15, s(T) = 20$ ve $s(M \cap T) = 5$ olur.



Yukarıdaki 6. özellik kullanılırsa

$$s(M \cup T) = s(M) + s(T) - s(M \cap T)$$
$$= 15 + 20 - 5$$
$$= 30 \text{ bulunur.}$$

Örnek

- Bir sınıfta bulunan öğrencilerle ilgili aşağıdaki bilgiler verilmiştir. 12 öğrenci İngilizce, 16 öğrenci Fransızca, 8 öğrenci Almanca, 2 öğrenci İngilizce ve Fransızca, 3 öğrenci İngilizce ve Almanca, 1 öğrenci Fransızca ve Almanca, 2 öğrenci ise hem İngilizce hem Fransızca ve hem de Almanca dillerini konuşmaktadır. Bu üç dili de konuşamayan öğrenci sayısı 5 olduğuna göre bu sınıftaki öğrenci sayısını bulunuz.

Çözüm: İngilizce, Fransızca ve Almanca konuşan öğrencilerin oluşturdukları kümeler sırasıyla İ, F ve A harfleriyle gösterilsin. Buna göre;

$$s(\text{İ}) = 12, s(F) = 16 \text{ ve } s(A) = 8 \text{ olur.}$$

İngilizce ve Fransızca bilenlerin kümesi $\text{İ} \cap F$ olduğundan $s(\text{İ} \cap F) = 2$,

İngilizce ve Almanca bilenlerin kümesi $\text{İ} \cap A$ olduğundan $s(\text{İ} \cap A) = 3$,

Fransızca ve Almanca bilenlerin kümesi $F \cap A$ olduğundan $s(F \cap A) = 1$,

İngilizce, Fransızca ve Almanca bilenlerin kümesi $\text{İ} \cap F \cap A$ olduğundan $s(\text{İ} \cap F \cap A) = 2$ olur.

Yukarıdaki 5. özellik kullanılırsa

$$s(\text{İ} \cup F \cup A) = s(\text{İ}) + s(F) + s(A) - s(\text{İ} \cap F) - s(\text{İ} \cap A)$$
$$-s(F \cap A) + s(\text{İ} \cap F \cap A)$$
$$= 12 + 16 + 8 - 2 - 3 - 1 + 2$$
$$= 32 \text{ bulunur.}$$

Bulunan bu değer İngilizce, Fransızca ve Almanca dillerinden en az birini konuşan öğrencilerin sayısıdır. Soruda bu üç dili de konuşamayan öğrenci sayısı 5 olarak verilmiştir. Öyleyse sınıftaki toplam öğrenci sayısı

$$32 + 5 = 37\text{'dir.}$$

Kesişim İşlemi İle İlgili Özellikler

A, B ve C kümeleri için aşağıdaki özellikler vardır:

1. $A \cap A = A$
2. $A \cap B = B \cap A$
3. $A \cap \emptyset = \emptyset$
4. $(A \cap B) \subset A, \ (A \cap B) \subset B$
5. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
6. Eğer A ve B kümeleri ayrık (yani $A \cap B = \emptyset$) ise
$$s(A \cup B) = s(A) + s(B)\text{'dir.}$$

Kümeler üzerinde tanımlanan birleşim ve kesişim işlemlerinin birbiri üzerlerine dağılma özellikleri vardır. A, B ve C kümeleri verilsin. Buna göre;

1. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
2. $(B \cap C) \cup A = (B \cup A) \cap (C \cup A)$
3. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
4. $(B \cup C) \cap A = (B \cap A) \cup (C \cap A)$ özellikleri vardır [4].

Teorem 1.1. (De Morgan Kuralı)

A ve B iki küme olmak üzere;

a) $(A \cup B)^t = A^t \cap B^t$ b) $(A \cap B)^t = A^t \cup B^t$ 'dir [2].

Örnek

• $E = \{1, 2, 3, 4, a, b, c, d\}$, $A = \{a, d\}$ ve $A^t \cap B^t = \{2, 3, c\}$ kümeleri veriliyor. Buna göre $A \cup B$ kümesini bulunuz.

Çözüm: De Morgan kuralına göre $(A \cup B)^t = A^t \cap B^t$ olduğundan;

$$(A \cup B)^t = \{2, 3, c\} \text{ 'dir.}$$

Buradan $A \cup B = \{1, 4, a, b, d\}$ olur.

Bu bölümde son olarak fonksiyonların tanımında ve grafik çizimlerinde de kullanılacak olan aşağıdaki tanım verilecektir.

Tanım 1.8. A ve B boş olmayan herhangi iki küme olsun. $a \in A$ ve $b \in B$ olmak üzere (a, b) ikililerinin oluşturduğu kümeye A ve B kümelerinin kartezyen çarpımı denir ve $A \times B$ ile gösterilir. Buna göre;

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}\text{'dir.}$$

Yukarıdaki tanımdan da görüleceği gibi $A \times B$ kümesi, birinci elemanı A kümesinden ve ikinci elemanı B kümesinden alınarak elde edilen sıralı ikililerden oluşan kümedir.

(a, b) ve (c, d) *ikililerinin birbirine eşit olması için aynı sıradaki elemanların birbirine eşit olması gerekir.* Yani $a = c$ ve $b = d$ olmalıdır. Aksi takdirde $(a, b) \neq (c, d)$ olur.

Not: Eğer $a \neq b$ ise $(a, b) \neq (b, a)$ 'dır.

Örnek

- $A = \{1, 2, 3\}$ ve $B = \{a, b\}$ kümeleri veriliyor. Buna göre $A \times B$ kümesi
- $A \times B = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)\}$'dir.
- Benzer şekilde $B \times A$ kümesi
- $B \times A = \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3)\}$ olur.

"⇔" sembolü "ancak ve ancak" anlamına gelir.

Bu örnekten de görüldüğü gibi $A \times B$ ve $B \times A$ kümelerinin birbirine eşit olması gerekmez.

Not: Eğer $A = B \Leftrightarrow A \times B = B \times A$ olur.

Örnek

- $(a, 2) = (3, b)$ eşitliği veriliyor. Buna göre $3a + 5b$ değerini bulunuz.

Çözüm: İki sıralı ikilinin birbirine eşit olması için aynı sırada bulunan ifadelerin birbirine eşit olması gerektiğinden üstte bahsedildi. Yani,

$$(a, 2) = (3, b) \text{ ise } a = 3 \text{ ve } b = 2\text{'dir.}$$

Öyleyse

$$3a + 5b = 3.3 + 5.2 = 19 \text{ olur.}$$

$A \times B$ kümesi (a, b) şeklindeki sıralı ikililerden oluştuğu gibi, $A \times B \times C$ kümesi de (a, b, c) şeklindeki sıralı üçlülerden oluşur. Böylece dört veya daha fazla kümenin kartezyen çarpımı için bu ifade benzer şekilde genelleştirilebilir.

Örnek

- $A = \{5, 7\}, B = \{a, b\}$ ve $C = \{x, y\}$ kümeleri veriliyor. Buna göre $(A \times B) \times C$ çarpım kümesini bulunuz.

Çözüm: Bunun için öncelikle $A \times B$ kümesini bulalım. Buradan

$$A \times B = \{(5, a), (5, b), (7, a), (7, b)\}\text{'olur.}$$

Dolayısıyla $(A \times B) \times C$ kümesi

$$(A \times B) \times C = \{(5, a, x), (5, b, x), (7, a, x), (7, b, x),$$

$(5, a, y), (5, b, y), (7, a, y), (7, b, y)\}$'dir.

Not: Boş olmayan bir A kümesinin kendisi ile kartezyen çarpımı $A \times A$ şeklinde gösterilir. $A \times A$ nın yerine bazen A^2 sembolü kullanılır. Benzer şekilde $A \times A \times A = A^3$ yazılır. Buna göre reel sayılar kümesindeki kartezyen çarpım $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ şeklinde ifade edilir.

Örnek

•$A = \{1, 2, 3\}$ kümesi için $A \times A$ kümesi $A \times A = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3)\}$ olur.

Kartezyen Çarpımın Özellikleri

A, B ve C kümeleri için kartezyen çarpımla ilgili aşağıdaki özellikler vardır:

1. $A \times \emptyset = \emptyset$ veya $\emptyset \times A = \emptyset$
2. $(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$
3. $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$
4. $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$
5. $s(A \times B) = s(A).s(B) = s(B).s(A) = s(B \times A)$
6. $s(A \times B \times C) = s(A).s(B).s(C)$ ‘dir.

Örnek

•$s(A) = n, s(B) = 2n$ ve $s(A \times B \times C) = 30$ ise C kümesinin eleman sayısını bulunuz.

Çözüm: $s(A \times B \times C) = s(A).s(B).s(C)$ olduğundan

$30 = n.2n.s(C) \Rightarrow 15 = n^2.s(C)$ yazılır.

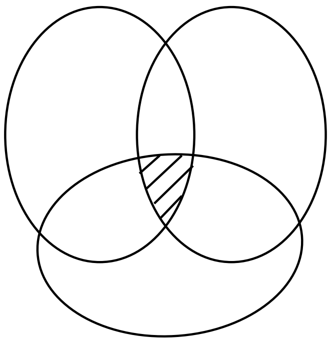
Bu eşitliğin sağlanması için $n = 1$ olmalıdır. Bu durumda C kümesinin eleman sayısı 15‘tir.

Özet

- Küme, iyi tanımlanmış, birbirinden farklı nesneler veya şekiller topluluğudur. Kümeler genellikle A, B, C, X ... gibi büyük harflerle, kümenin elemanları ise a, b, c, x ... gibi küçük harflerle gösterilir. Bir A kümesinin eleman sayısı $s(A)$ ile gösterilir. Bir nesnenin, bir kümeye ait olup olmadığını belirtmek için $\in$ veya $\notin$ sembolleri kullanılır. Bir a elemanı A kümesine aitse $a \in A$ şeklinde gösterilir ve "a elemanıdır A nın" diye okunur. Eğer a elemanı A kümesine ait değilse "a elemanı değildir A nın" diye okunur. Kümeler; listeleme yöntemi, ortak özellik yöntemi ve Venn şeması yöntemlerinden herhangi birisiyle gösterilebilir.
- A ve B gibi iki küme verildiğinde eğer A kümesinin her elemanı B kümesinin de bir elemanı oluyorsa A' ya B nin alt kümesi denir ve bu $A \subset B$ ile gösterilir. Eleman sayısı n olan bir kümenin alt kümelerinin sayısı 2^n dir. Her küme kendisinin bir alt kümesidir. Bir kümenin kendisi hariç alt kümelerine, o kümenin öz (has) alt kümeleri denir. Eleman sayısı n olan bir kümenin öz alt kümelerinin sayısı $2^n - 1$ dir.
- A ve B kümelerinin simetrik farkı $A \Delta B$ ile gösterilir ve $A \setminus B$ kümesi ile $B \setminus A$ kümesinin birleşiminden oluşur. $A \Delta B$ kümesinin eleman sayısı, A kümesi ile B kümesinin eleman sayılarının toplamından $A \cap B$ kümesinin eleman sayısı çıkarılarak bulunur.
- Üzerinde çalıştığımız en geniş kümeye evrensel küme denir ve E harfi ile gösterilir. İki kümenin birleşimi, kesişimi, farkı için sırasıyla "$\cup$, $\cap$, $\setminus$" sembolleri kullanılır. Bir A kümesine ait olmayan fakat evrensel kümeye ait olan elemanların oluşturduğu kümeye A kümesinin tümleyeni denir ve A^t ile gösterilir. Aynı zamanda $A^t = E \setminus A$ dır. Ayrıca $E^t = \emptyset$ ve $\emptyset^t = E$ dir. Bir kümenin tümleyeninin tümleyeni yine kendisine eşittir. İki kümenin birleşimlerinin ve arakesitlerinin tümleyenleri için De Morgan kuralı kullanılır.
- Boş olmayan A ve B kümelerinin kartezyen çarpımı $A \times B$ ile gösterilir ve (a, b) şeklindeki sıralı ikililerden oluşur. A boş olmayan herhangi bir küme olmak üzere A^3, A^4,..., A^n nin elemanlarına sırasıyla sıralı üçlü, sıralı dörtlü ve sıralı n-li denir. Genellikle $A \times B \neq B \times A$ dır. Yani iki kümenin kartezyen çarpımının değişme özelliği yoktur. $A \times B$ nin $B \times A$ ya eşit olması için $A = B$ olması gerekir. Herhangi bir kartezyen çarpım kümesinin eleman sayısı, kartezyen çarpıma katılan bütün kümelerin eleman sayılarının çarpımına eşittir.

DEĞERLENDİRME SORULARI

1.



Şekildeki gibi A, B ve C kümeleri veriliyor. Aşağıdakilerden hangisi yukarıdaki taralı bölgeyi gösterir?

a) $(A \cap B) \cup C$
b) $(A \setminus B) \cup C$
c) $(A \cup B) \setminus C$
d) $A \cup B \cup C$
e) $A \cap B \cap C$

2. $A = \{1, 2\}, A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ve $A \setminus B = \{1\}$ ise B kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

a) $\{1, 2\}$
b) $\{1, 2, 3\}$
c) $\{2\}$
d) $\{2, 3, 4\}$
e) $\{2, 3, 4, 5\}$

3. A kümesinin alt kümelerinin sayısı 64 olduğuna göre bu kümenin eleman sayısı kaçtır?

a) 4
b) 5
c) 6
d) 7
e) 8

4. $E = \{a, b, c, k, 7, 9\}, A = \{b, k, 9\}$ ve $B = \{a, c, k, 9\}$ olduğuna göre $A^t \cap B$ kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

a) $\{a, c\}$
b) $\{a, c, 7\}$
c) $\{c, 7, 9\}$
d) $\{a, c, k, 9\}$
e) $\{c, k, 9\}$

5. A ve B iki küme olsun. $s(A) = 2. s(B), s(A \cap B) = 4$ ve $s(A \setminus B) = 10$ ise $A \cup B$ kümesinin eleman sayısı kaçtır?
   a) 10
   b) 11
   c) 13
   d) 17
   e) 20

6. Matematik, Türkçe ve İngilizce derslerini alan öğrencilerden oluşan bir sınıfta, üç dersi de alan 5, matematik ve Türkçe dersini alan 8, matematik ve İngilizce dersini alan 7, Türkçe ve İngilizce dersini alan 9 öğrenci vardır. Matematik dersini alan 21, Türkçe dersini alan 32 ve İngilizce dersini alan 36 öğrenci olduğuna göre bu sınıfta kaç öğrenci vardır?
   a) 33
   b) 55
   c) 65
   d) 70
   e) 80

7. A, B ve C boş olmayan birer küme olmak üzere aşağıdakilerden hangisi yanlıştır?
   a) $A \cap \emptyset = \emptyset$
   b) $A \subset (A \cup B)$
   c) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
   d) $A \cap B \subset A \cup B$
   e) $A \cap (B \cup C) = (A \cup B) \cap (A \cup C$

8. $A = \{a, b, c\}$ ve $B = \{1, 2, 3, 4\}$ kümeleri veriliyor. Buna göre $A \times B$ kümesinin eleman sayısı kaçtır?
   a) 7
   b) 8
   c) 10
   d) 12
   e) 15

9. Aşağıdakilerden hangisi 8. Soruda verilen $A \times B$ kümesinin elemanlarından biri değildir?
   a) $(a, 1)$
   b) $(c, 3)$
   c) $(b, 2)$
   d) $(b, 4)$
   e) $(2, a)$

10. A, B ve C birer küme olmak üzere;

I. $A = B$ ise $A \times B = B \times A$'dır.

II. $s(A \times B) = s(B \times A)$'dır.

III. $A \cup B = A$ ise $A \cap B = \emptyset$'dir.

ifadelerinden hangileri her zaman doğrudur?

a) Yalnız I
b) Yalnız II
c) Yalnız III
d) I ve II
e) II ve III

Cevap Anahtarı

1.e, 2.e, 3.c, 4.a, 5.d, 6.d, 7.e, 8.d, 9.e, 10.d

YARARLANILAN KAYNAKLAR

[1] Balcı, M. (2012). “Matematik Analiz-1”. Sürat Üniversite Yayınları.

[2] Bartle G. R., Sherbert R. D. (2011). “Introduction to Real Analysis”. John Wiley and Sons, Inc. 4. Baskı.

[3] Bayraktar, M., (2010). “Analiz”. Nobel Yayın Dağıtım Tic. Ltd. Şti. Yayın No: 1601, ISBN 978-605-395-412-5.

[4] Kadıoğlu, E., Kamali, M. (2013). “Genel Matematik”. Kültür Eğitim Vakfı Yayınevi, 8. Baskı.

[5] Küçük, Y., Üreyen M., Orhon N., Şenel M., Özer O., Azcan H., (2002). “Genel Matematik”. Anadolu Üniversitesi Yayını, 2. Baskı.