Kritik Noktalar

1) Sıfır Noktası

- $z=a$ noktasında $f(a)=0$ oluyorsa, bu nokta $f(z)$'nin sıfır noktasıdır.
- Eğer $f(a)=0$ ve fakat $f'(a)\neq 0$ ise a noktası 1. mertebeden sıfır noktası olur.

Bu sonucu genelleştirirsek:

- $f(a)=f'(a)=f''(a)=\ldots\ldots=f^{(m-1)}(a)=0$ ve $f^{m}(a)\neq 0$ ise a noktası m. mertebeden sıfır noktası olur.

Bu durumda m. mertebeden bir sıfır noktasında $f(z)$'nin Taylor açılımı:

$$f(z)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(z-a)+\frac{f''(a)}{2!}(z-a)^2+\ldots+\frac{f^{(m)}}{m!}(z-a)^m$$

$$+\frac{f^{(m+1)}(a)}{(m+1)!}(z-a)^{m+1}+\ldots\ldots=$$

$$=\frac{f^{(m)}(a)}{m!}(z-a)^m+\frac{f^{(m+1)}(a)}{(m+1)!}(z-a)^{m+1}+\ldots\ldots$$

$(z-a)^m$'li terimden başlar

2) Tekil Noktalar

$f(z)$ fonksiyonunun analitik olmaktan çıktığı noktaya tekil nokta deriz. 3 türlü tekil nokta olabilir:

1. Zahiri Tekil Nokta: $z=a$'da $f(z)$ analitik değil fakat, $z\to a$ olurken $|f(z)|<M$ gibi sonlu bir M sayısının altında kalıyorsa, a noktası zahiri tekil nokta olur.

zahiri tekillik kalderulup fonksiyon o noktada analitik kelenabilir.

2. <u>Kutup Noktası</u>: $z \to a$ olurken $|f(z)| \to \infty$ oluyorsa, a bir kutup noktası olur. Uygulamada en çok karşılaşılan tekil nokta türü kutup noktasıdır.

$$\lim_{z \to a} |f(z)| \to \infty \quad \text{ise ve fakat}$$

$$\lim_{z \to a} (z-a) \cdot f(z) \quad \text{analitik oluyorsa}$$

$z = a$ noktası 1. mertebeden kutup noktası olur. Bunu genellestirirsek;

$$\lim_{z \to a} |f(z)| \to \infty$$

$$\lim_{z \to a} (z-a) \cdot f(z) \to \infty$$

$$\lim_{z \to a} (z-a)^2 \cdot f(z) \to \infty$$

$$\vdots$$

$$\lim_{z \to a} (z-a)^{m-1} f(z) \to \infty$$

$$\lim_{z \to a} (z-a)^m f(z) \quad \text{analitik oluyorsa}$$

$z = a$ noktası m. mertebeden kutup noktası

3. <u>Esaslı Tekil Nokta</u>: Yukarıdaki iki durum dışında kalan tekil noktalara esaslı tekil nokta deriz. Başka bir açıdan tanımlamak istersek.

$$\lim_{z \to a} (z-a)^m f(z)$$

ifadesi analitik olacak şekilde, sonlu bir m değeri bulunamıyorsa, $z=a$ esasla tekil noktadır (veya sonsuz mertebeden kutuptur)

Örnek: $f(z) = \frac{\sin z}{z}$ fonksiyonunun tekil noktalarını araştırın.

Bu fonksiyon $z=0$'da analitik değildir. Fakat

$$\lim_{z \to 0} \frac{\sin z}{z} \longrightarrow 1$$

olduğundan $z=0$ zahiri tekil noktadır.

Örnek: $f(z) = \frac{1}{z-z^3}$ fonksiyonunun tekil noktalarını araştırın.

Bu fonksiyon için paydanın sıfır olduğu $z=0; \pm 1$ noktaları birer kutup noktasıdır.

$$f(z) = \frac{1}{z(1-z^2)} = \frac{1}{z(1-z)(1+z)}$$

Örnek: $f(z) = \frac{1}{z(z-2)^3}$ fonksiyonu için tekil noktaları araştırın.

Bu fonksiyon için paydanın sıfır olduğu $z=0$, ve $z=2$ noktaları kutup noktalarıdır.

$$\lim_{z\to 0}\left|\frac{1}{z(z-2)^3}\right| \to \infty$$

$$\lim_{z\to 0} \cancel{(z-0)}\,\frac{1}{\cancel{z}(z-2)^3} \to -\frac{1}{8}$$ olup sonlu değerdediz

$z=0$ noktası 1. mertebeden kutup noktasıdır.

$$\lim_{z\to 2}\left|\frac{1}{z(z-2)^3}\right| \to \infty$$

$$\lim_{z\to 2} \cancel{(z-2)^3}\cdot\frac{1}{z\cancel{(z-2)^3}} \to \frac{1}{2}$$ olup sonlu değerdediz.

$z=2$ noktası 3. mertebeden kutup noktasıdır.

Örnek: $f(z)=\dfrac{1}{\sin^2 z}$ fonksiyonu için, $z=0$ bir kutup noktasıdır. Mertebesini bulmak üzere $z, z^2, \ldots$ ile çarpıp limiti alınırsa

$$\lim_{z\to 0} z\cdot\frac{1}{\sin^2 z} = \lim_{z\to 0}\frac{z}{\sin z}\cdot\frac{1}{\sin z} = \lim_{z\to 0} 1\times\frac{1}{\sin z} \to \infty$$

$$\lim_{z\to 0} z^2\cdot\frac{1}{\sin^2 z} = \lim_{z\to 0}\left(\frac{z}{\sin z}\right)^2 = 1$$

$z=0$ noktası 2. mertebeden kutup noktasıdır.

Örnek: $f(z)=e^{1/z}$ fonksiyonu için $z=0$ esaslı tekil noktadır.

$$\lim_{z\to 0} z^m e^{1/z}$$

ifadesi sonlu hiçbir m değeri için analitik

Ödev: Aşağıdaki fonksiyonların kritik noktalarını belirleyin ve hangi cins olduğunu (zahiri veya esaslı tekil nokta, kutup noktası) bulun:

a) $f(z) = \dfrac{z+2}{z^2-3z}$;

b) $f(z) = \dfrac{z^3-1}{(z-1)^2(z^2+4)}$

c) $f(z) = \dfrac{1-e^z}{z^4}$

d) $f(z) = \dfrac{z}{\cos z}$

e) $f(z) = \dfrac{\cos z}{(z-\pi/2)^4}$

f) $f(z) = \dfrac{1}{\cos(1/z)}$

Laurent Serisi

$f(z)$ fonksiyonu için $z=a$ noktası m. mertebeden kutup ise

$$g(z) = (z-a)^m f(z)$$

fonksiyonu a noktasında analitik demektir ve Taylor serisi olarak açılabilir:

$$g(z) = g(a) + g'(a)(z-a) + \frac{g''(a)}{2!}(z-a)^2 + \dots + \frac{g^{(m-1)}(a)}{(m-1)!}(z-a)^{m-1} + \frac{g^{(m)}(a)}{m!}(z-a)^m + \frac{g^{(m+1)}(a)}{(m+1)!}(z-a)^{m+1} + \dots$$

Bu seri $f(z) = \dfrac{g(z)}{(z-a)^m}$ ifadesi içinde kullanılırsa

$$f(z) = \frac{g(a)}{(z-a)^m} + \frac{g'(a)}{(z-a)^{m-1}} + \frac{g''(a)}{2!\,(z-a)^{m-2}} + \dots + \frac{g^{(m-1)}(a)}{(m-1)!\,(z-a)} + \frac{g^{(m)}(a)}{m!} + \frac{g^{(m+1)}(a)}{(m+1)!}(z-a) + \frac{g^{(m+2)}(a)}{(m+2)!}(z-a)$$

Bu sonuca göre $f(z)$ fonksiyonu, analitik olmadığı bir kutup noktası etrafında da seri olarak açılabilir. Ancak seri açılımı $1/(z-a)^m$ 'li bir terimle başlar. Elde ettiğimiz ifadeyi aşağıdaki şekilde de yazabiliriz

$$f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m (z-a)^m + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{b_m}{(z-a)^m}$$

Daha genel olarak

$$f(z) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_m (z-a)^m$$

K_m merkezi

seri ifadesine Laurent serisi deriz.

* a noktası m. mertebeden kutup ise, Laurent serisi $(z-a)^{-m}$ 'li terimden başlar.
* a noktası esaslı tekil nokta ise, $(z-a)^{-\infty}$ 'li terimden başlar.

Örnek: $f(z) = \dfrac{e^z}{z^2}$ fonksiyonunun $z=0$ 'da seri açılımını yazın.

$$f(z) = \frac{e^z}{z^2} = \frac{1}{z^2}\left(1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots\right) =$$

$$= \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!} + \frac{z}{3!} + \frac{z^2}{4!} + \cdots =$$

$$= \sum_{n=-2}^{\infty} \frac{z^n}{(n+2)!}$$

Öznek: $f(z) = e^{1/z}$ fonksiyonunun $z=0$'da seri açılımını yazın

$u = \frac{1}{z}$ alırsak

$$e^{1/z} = e^{u} = 1 + u + \frac{u^2}{2!} + \frac{u^3}{3!} + \cdots\cdots =$$

$$= 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!\,z^2} + \frac{1}{3!\,z^3} + \cdots\cdots =$$

$$= \cdots\cdots + \frac{1}{3!\,z^3} + \frac{1}{2!\,z^2} + \frac{1}{z} + 1$$

Öznek: $f(z) = \frac{z}{(z+1)(z+2)}$ fonksiyonunun $z=-2$'de seri açılımını yazın.

$z+2 = u$ olarak yeni bir u değişkeni seçersek, $z = u-2$

$$f(z) = \frac{u-2}{(u-1)\cdot u} = \frac{2-u}{u}\cdot\left(\frac{1}{1-u}\right) =$$

$$= \frac{2-u}{u}\left\{1 + u + u^2 + \cdots\cdots\right\} =$$

$$= \frac{2 + u + u^2 + u^3 + \cdots\cdots}{u} = \frac{2}{u} + 1 + u + u^2 + \cdots$$

$$= \frac{2}{z+2} + 1 + (z+2) + (z+2)^2 + \cdots\cdots$$

Seri $(z+2)^{-1}$'den başladığı için $z=2$ noktası 1. mertebeden kutuptur.

$u = 2+1$

$\frac{u-1}{u(u+1)}$ $\frac{u-1}{u}\left(\frac{1}{u+1}\right)$

Bu notlar aşağıdaki kaynaktan yararlanılarak hazırlanmıştır.

Kaynak: Fizik ve Mühendislikte Matematik Yöntemler

Prof. Dr. Bekir Karaoğlu, Seçkin Yayıncılık