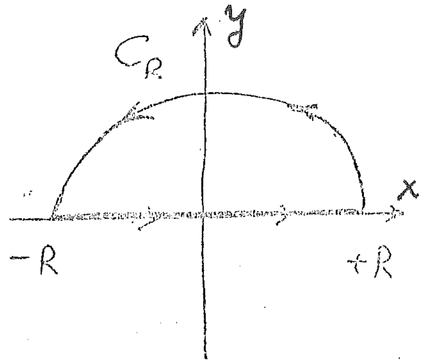
* 4.3 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cdot\cos ax\cdot dx$ ve $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cdot\sin ax\cdot dx$ Türü İntegraller.

$e^{iax} = \cos ax + i\sin ax$ olduğundan, bu iki integrali tek bir integralin reel ve sanal kesimleri olarak yazabiliriz.

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iax}\cdot f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cdot\cos ax\,dx + \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cdot\sin ax\,dx$$

Bu üstel kompleks I integralini bulursak:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos ax\cdot dx = \mathrm{Re}\, I$$



$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin ax\cdot dx = \mathrm{Im}\, I$$

Yine kompleks düzlemde reel eksen ve onun üst tarafında yarım bir çember C_R'den oluşan kapalı bir C eğrisi alalım ve şu integrali inceleyelim:

$$\lim_{R\to\infty}\oint_C e^{iaz} f(z)\,dz = \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} e^{iax} f(x)\,dx + \underbrace{\lim_{R\to\infty}\oint_{C_R} e^{iaz} f(z)\,dz}_{\text{Jordan Teoremine göre} = 0}$$

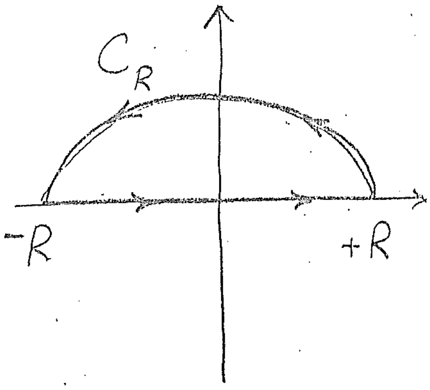
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iax} f(x)\,dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iax} f(x)\,dx = \lim_{R\to\infty}\oint_C e^{iaz} f(z)\,dz = 2\pi i\cdot\sum_k \mathrm{Res}\left\{f(z_k)e^{iaz_k}\right\}$$

z_k : üst

Örnek: $I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2+b^2}\,dx = \frac{\pi}{b} e^{-b}$

$I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2+b^2}\,dx = 0$



olduğunu gösterin.

$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x^2+b^2}\,dx = \lim_{R\to\infty} \oint_C \frac{e^{iz}}{z^2+b^2}\,dz$ alınırsa

$I_1 = \operatorname{Re} I$

$I_2 = \operatorname{Im} I$

Kutup noktaları $z = \pm ib$ olup sadece $z = +ib$ noktası üst yarımdüzlemde, yani bizim konturumuzun içinde yer alıyor.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x^2+b^2}\,dx = \lim_{R\to\infty} \oint_C \frac{e^{iz}}{z^2+b^2}\,dz = 2\pi i \cdot \operatorname{Res} f(+ib)$$

$$\operatorname{Res} f(+ib) = \lim_{z\to ib} \cancel{(z-ib)} \frac{e^{iz}}{\cancel{(z-ib)}(z+ib)} = \frac{e^{-b}}{2ib}$$

$$I = \cancel{2}\pi \cancel{i} \cdot \frac{e^{-b}}{\cancel{2i}b} = \frac{\pi}{b} \cdot e^{-b}$$

$$I = \frac{\pi}{b} e^{-b} + i \cdot 0$$

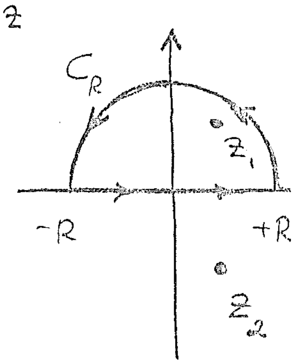
$$I_1 = \operatorname{Re} I = \frac{\pi}{b} \cdot e^{-b}$$

$$I_2 = \operatorname{Im} I = 0$$

Örnek: Aşağıdaki integralleri hesaplayın:

$$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos\frac{\pi x}{3}}{x^2-2x+5}\,dx \qquad I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin\frac{\pi x}{3}}{x^2-2x+5}\,dx$$

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\pi x/3}}{x^2-2x+5}\,dx = \lim_{R\to\infty} \oint_C \frac{e^{i\pi z/3}}{z^2-2z+5}\,dz$$



$$I_1 = \mathrm{Re}\, I$$

$$I_2 = \mathrm{Im}\, I$$

Öncelikle fonksiyonun kutup noktalarını bulalım:

$$z^2-2z+5=0$$

$$\Delta = 4-4\cdot 5 = -16$$

$$z_1 = \frac{2+\sqrt{-16}}{2} = \frac{2+4i}{2} = 1+2i$$

$$z_2 = \frac{2-\sqrt{-16}}{2} = \frac{2-4i}{2} = 1-2i$$

Sadece z_1 üst yarımdüzlemde kalıyor:

$$I = 2\pi i \cdot \mathrm{Res}\, f(1+2i) = 2\pi i \lim_{z\to 1+2i} \cancel{(z-(1+2i))} \frac{e^{i\pi z/3}}{\cancel{(z-(1+2i))}(z-(1-2i))}$$

$$= 2\pi i \cdot \frac{e^{i\pi\cdot(1+2i)/3}}{(\cancel{1}+2i-\cancel{1}+2i)} = \frac{\cancel{2\pi i}^{\,\pi}\; e^{i\pi/3}\, e^{-2\pi/3}}{\cancel{4i}_{\,2}}$$

$$= \frac{\pi}{2}\cdot e^{-2\pi/3}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{2} e^{-2\pi/3}\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= \frac{\pi}{4}\left(1+i\sqrt{3}\right)\cdot e^{-2\pi/3}$$

$$I_1 = \operatorname{Re} I = \frac{\pi}{4} e^{-2\pi/3}$$

$$I_2 = \operatorname{Im} I = \frac{\sqrt{3}\pi}{4} e^{-2\pi/3}$$

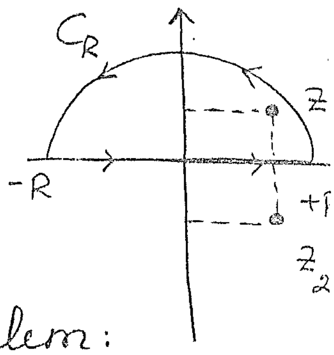
Örnek: Aşağıdaki integrallerin sonuçlarını doğrulayın:

$$I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2+4x+5} dx = -\frac{\pi}{e} \sin 2$$

$$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2+4x+5} dx = \frac{\pi}{e} \cos 2$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x \, dx}{x^2+4x+5} = \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x^2+4x+5} dx =$$

$$= \operatorname{Re} \left[\lim_{R\to\infty} \oint_C \frac{e^{iz}}{z^2+4z+5} dz \right]$$



Öncelikle kutup noktalarını bulalım:

$$z^2+4z+5=0$$

$$D = 16-4.5 = -4$$

$$z_1 = \frac{-4+\sqrt{-4}}{2} = \frac{-4+2i}{2} = -2+i$$ üst yarımdüzlemde bulunuyor

$$z_2 = \frac{-4-\sqrt{-4}}{2} = \frac{-4-2i}{2} = -2-i$$

$$I = \left[2\pi i \cdot \operatorname{Res} f(-2+i) \right]$$

$$\operatorname{Res} f(-2+i) = \lim_{z\to -2+i} \cancel{(z+2-i)} \cdot \frac{e^{iz}}{\cancel{(z-(-2+i))}(z-(-2-i))} =$$

$$= \frac{e^{i(-2+i)}}{-2+i+2+i} = \frac{e^{-i2-1}}{2i} = \frac{e^{-1}}{2i} e^{-i2} =$$

$$= \frac{-i}{2e} e^{-i\cdot 2} = \frac{-i}{2e}\cdot(\cos 2 - i\sin 2) =$$

$$= -\frac{i}{2e}(\cos 2 - i\sin 2)$$

$$I = \cancel{2}\pi i\cdot\frac{-i}{\cancel{2}e}(\cos 2 - i\sin 2) =$$

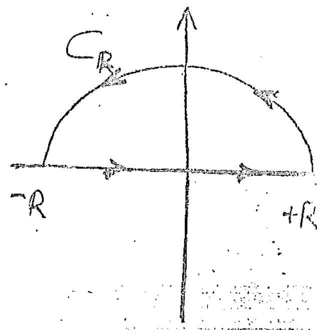
$$= \frac{\pi}{e}(\cos 2 - i\sin 2)$$

$$I_1 = Re\, I = \frac{\pi}{e}\cos 2$$

$$I_2 = Im\, I = -\frac{\pi}{e}\sin 2$$

Örnek: Aşağıdaki integrallerin verilen sonuçlarını doğrulayın:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x}{(x^2+1)^2}\,dx = \frac{\pi}{e}$$



$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{(x^2+1)^2}\,dx = 0.$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x}{(x^2+1)^2}\,dx = Re\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ix}}{(x^2+1)^2}\,dx = Re\left[\lim_{R\to\infty}\oint_C\frac{e^{iz}}{(z^2+1)^2}\right.$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{(x^2+1)^2}\,dx = Im\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ix}}{(x^2+1)^2}\,dx = Im\left[\lim_{R\to\infty}\oint_C\frac{e^{iz}}{(z^2+1)^2}\right.$$

$$\lim_{R\to\infty} \oint_C \frac{e^{iz}}{(z^2+1)^2}\,dz = 2\pi i\cdot\left\{\operatorname{Res} f(i)\right\}$$

$$\operatorname{Res} f(i) = \frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\left[\cancel{(z-i)^2}\cdot\frac{e^{iz}}{\cancel{(z-i)^2}(z+i)^2}\right] =$$

$$= \lim_{z\to i}\frac{ie^{iz}(z+i)^{\cancel{2}} - e^{iz}\cdot 2\cancel{(z+i)}}{(z+i)^{\cancel{4}}} =$$

$$= \lim_{z\to i}\frac{ize^{iz} - e^{iz} - 2e^{iz}}{(z+i)^3} = \lim_{z\to i}\frac{ize^{iz} - 3e^{iz}}{(z+i)^3} =$$

$$= \frac{i\cdot i\cdot e^{i\cdot i} - 3\cdot e^{i\cdot i}}{(i+i)^3} = \frac{-e^{-1} - 3e^{-1}}{-8i} = \frac{-4e^{-1}}{-8i} =$$

$$= \frac{e^{-1}}{2i} = -\frac{i}{2e}$$

$$I = \cancel{2}\pi i\cdot\frac{-i}{\cancel{2}e} = \frac{\pi}{e}$$

$$I_1 = \operatorname{Re} I = \frac{\pi}{e}$$

$$I_2 = \operatorname{Im} I = 0$$

Ödev Aşağıdaki integrallerin verilen sonuçlarını doğrulayın:

a) $$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{(x^2+1)(x^2+4)}\,dx = \frac{\pi}{6}\left(\frac{2}{e}-\frac{1}{e^2}\right)$$

b) $$\int_{0}^{\infty} \frac{\cos ax}{x^2+1}\,dx = \frac{\pi}{2}\cdot e^{-a} \quad (a \geq 0)$$

c) $$\int_{0}^{\infty} \frac{x\cdot \sin 2x}{x^2+3}\,dx = \frac{\pi}{2}\, e^{-2\sqrt{3}}$$

$n=0$

d) $$\int_{0}^{\infty} \frac{\cos mx}{x^2+a^2}\,dx = \frac{\pi}{2a}\, e^{-ma}$$

$n=0$

e) $$\int_{0}^{\infty} \frac{\cos 2x}{(4x^2+9)^2}\,dx = \frac{\pi e^{-3}}{54}$$

$n=1$

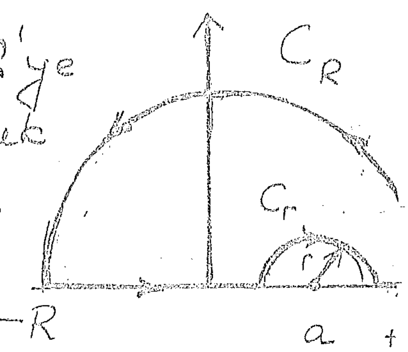
f) $$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2+4x+5}\,dx = -\frac{\pi}{e}\sin 2$$

$n=0$

4.7.5 $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x)}{x-a}\,dx$ Türü İntegraller

Reel bir a sayısı için, bu tür integrallerin zorluğu $z=a$ kutup noktasının reel eksen üzerine (yani C eğrisi üzerine) rastlamış olmasıdır.

Bu kez C eğrisi aşağıdaki gibi seçilir: Reel eksen üzerinde $-R$'den $+R$'ye giderken a noktası etrafında küçük bir C_r çemberi üzerinden geçilir ve kapalı eğri yine R yarıçaplı C_R çemberiyle tamamlanır. Buna göre



$$\oint_C \frac{f(z)\,dz}{z-a} = \int_{-R}^{a-r} \frac{f(x)\,dx}{x-a} + \int_{C_r} \frac{f(z)\,dz}{z-a} + \int_{a+r}^{+R} \frac{f(x)\,dx}{x-a} + \int_{C_R} \frac{f(z)\,dz}{z-a}$$

Eğer $\lim_{R\to\infty} f(z) \to 0$ koşulunu sağlıyorsa, Jordan teoremine göre

$$\int_{C_R} \frac{f(z)\,dz}{z-a} = 0$$

olacaktır.

Kalan integrallerden ikisi birleştirilip $\boxed{r \to 0 \text{ limiti}}$ alınırsa

$$\lim_{\substack{r\to 0\\ R\to\infty}} \left\{ \int_{-R}^{a-r} \frac{f(x)\,dx}{x-a} + \int_{a+r}^{R} \frac{f(x)\,dx}{x-a} \right\} + \lim_{r\to 0} \int_{C_r} \frac{f(z)\,dz}{z-a} = \oint_C \frac{f(z)\,dz}{z-a}$$

$$\int_{-\infty}^{a} \frac{f(x)dx}{x-a} + \int_{a}^{\infty} \frac{f(x)dx}{x-a} + \lim_{r\to 0} \int_{C_r} \frac{f(z)dz}{z-a} = \oint_{C} \frac{f(z)dz}{z-a}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x)\,dx}{x-a} + \lim_{r\to 0} \int_{C_r} \frac{f(z)dz}{z-a} = 2\pi i \sum_{k=1}^{N} \operatorname{Res}\left[\frac{f(z_k)}{z_k-a}\right]$$

$$I + I_r = 2\pi i \sum_{k=1}^{N} \operatorname{Res}\left[\frac{f(z_k)}{z_k-a}\right]$$

$$I = 2\pi i \sum_{k=1}^{N} \operatorname{Res}\left[\frac{f(z_k)}{z_k-a}\right] - I_r$$

Şimdi I_r integralini hesaplayalım:

$$I_r = \lim_{r\to 0} \int \frac{f(z)dz}{z-a}$$

C_r yarım çemberi üzerindeki bir z noktasının kutupsal gösterimi

$$z-a = r.e^{i\theta}$$
$$dz = r.e^{i\theta}.i.d\theta$$

Paydaki $f(z)$ fonksiyonu a noktasında analitik olduğundan

$$\lim_{r\to 0} f(z) = f(a)$$

$$I_r = \lim_{r\to 0} \int_{C_r} \frac{f(z)}{\cancel{r}.\cancel{e^{i\theta}}} \cdot i.\cancel{r}.\cancel{e^{i\theta}}\, d\theta = i.f(a) \cdot \int_{\pi}^{0} d\theta =$$

$$= -i\pi.\,f(a)$$

$$I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(x)\,dx}{x-a}=2\pi i\sum_{k=1}^{N}\mathrm{Res}\left[\frac{f(z_k)}{z_k-a}\right]+i\pi f(a)$$

Bu sonuç birden çok $a_1, a_2, \ldots\, a_M$ kutup noktaları için kolayca genelleştirilebilir:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(x)}{(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_M)}\,dx=2\pi i\sum_{k=1}^{N}\mathrm{Res}\left[\frac{f(z_k)}{z_k-a}\right]+i\pi\sum_{j=1}^{M}f(a_j)$$

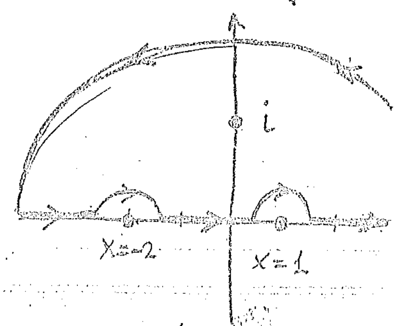
Örnek: Aşağıdaki integralin değerini hesaplayın:

$$I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x-1)(x+2)(x^2+1)}=2\pi i\sum_{k=1}^{N}\mathrm{Res}\left[\frac{f(z_k)}{z_k-a}\right]+i\pi\sum_{j=1}^{M}f(a_j)$$

Kutup noktaları

$x_1=1 \qquad x_3=i$

$x_2=-2 \qquad x_4=-i$



olup, x_1 ve x_2 reel eksen üzerinde; x_3 ve x_4 ise sanal eksen üzerindedir. $x_4=-i$ kutup noktası aşağıdaki yarım düzlemde kaldığı için (kontur dışında) bizi ilgilendirmiyor.

$$I=2\pi i\cdot \mathrm{Res}\,f(i)+i\pi f(-2)+i\pi f(1)$$

$$\mathrm{Res}\,f(i)=\lim_{z\to i}\cancel{(z-i)}\frac{1}{(z-1)(z+2)(z+i)\cancel{(z-i)}}=$$

$$=\frac{1}{(i-1)(i+2)\cdot 2i}=\frac{1}{2i(-1+2i-i-2)}=\frac{1}{2i(i-3)}=\frac{1}{-2-}$$

$$f(-2) = \frac{1}{(z-1)(z^2+1)}\Bigg|_{z=-2} = \frac{1}{(-2-1)(4+1)} = \frac{1}{-3.5} =$$

$$= -\frac{1}{15}$$

$$f(1) = \frac{1}{(z+2)(z^2+1)}\Bigg|_{z=1} = \frac{1}{(1+2)(1+1)} = \frac{1}{3.2} = \frac{1}{6}$$

$$I = \cancel{2}\pi i \cdot \frac{1}{-\cancel{2}(1+3i)} + i\pi \cdot \frac{-1}{15} + i\pi \cdot \frac{1}{6} =$$

$$= \frac{-i\pi}{1+3i} + i\pi \cdot \frac{-2+5}{30} = \frac{-i\pi(1-3i)}{10} + i\pi \cdot \frac{3}{30} =$$

$$= \frac{-i\pi - 3\pi}{10} + \frac{i\pi}{10} = \frac{-\cancel{i\pi} - 3\pi + \cancel{i\pi}}{10} = -\frac{3\pi}{10}$$

Örnek: Aşağıdaki integrallerin verilen sonuçlarını doğrulayın:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+x+2}{x^4-5x^2+4}\, dx = 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+x+2}{x^4-5x^2+4}\, dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{N} Res\left[\frac{f(z_k)}{z_k - a}\right] + i\pi \sum_{j=1}^{M} f(a$$

integral içindeki fonksiyonun kutup noktalarını bulalım:

$$x^4 - 5x^2 + 4 = 0$$

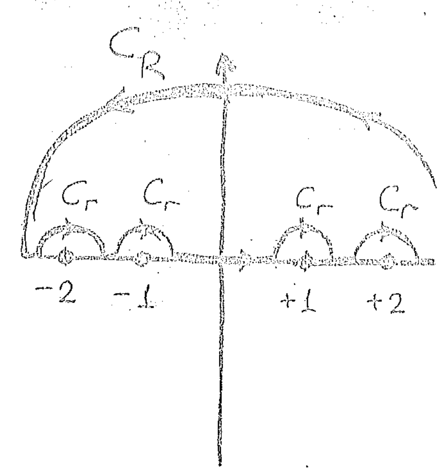
$x^2 = u$ değişken değiştirmesi yapalım.

$u^2 - 5u + 4 = 0$

$D = 25 - 4 \cdot 4 = 9$

$u_1 = \dfrac{5+3}{2} = 4$

$u_2 = \dfrac{5-3}{2} = 1$



1) $x^2 = 4$

$x_1 = +2$

$x_2 = -2$

2) $x^2 = 1$

$x_1 = +1$

$x_2 = -1$

Kutup noktalarının hepsi reel eksen üzerinde olduğundan

$$2\pi i \sum_{k=1}^{N} Res\left[\frac{f(z_k)}{z_k - a}\right] = 0$$

$$I = i\pi \cdot f(1) + i\pi f(-1) + i\pi f(2) + i\pi f(-2) =$$
$$= i\pi \cdot \left\{ f(1) + f(-1) + f(2) + f(-2) \right\}$$

$$f(1) = \left.\frac{z^2 + z + 2}{(z+1)(z-2)(z+2)}\right|_{z=1} = \frac{1+1+2}{2 \cdot (-1) \cdot 3} = \frac{4}{-6} = -\frac{2}{3}$$

$$f(-1) = \left.\frac{z^2 + z + 2}{(z-1)(z-2)(z+2)}\right|_{z=-1} = \frac{1-1+2}{-2 \cdot (-3) \cdot 1} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$f(2) = \left.\frac{z^2 + z + 2}{(z+1)(z-1)(z+2)}\right|_{z=2} = \frac{4+2+2}{3 \cdot 1 \cdot 4} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$

$$f(-2) = \left.\frac{z^2+z+2}{(z+1)(z-1)(z-2)}\right|_{z=-2} = \frac{4-2+2}{-1\cdot(-3)\cdot(-4)} =$$

$$= \frac{4}{-12} = -\frac{1}{3}$$

$$I = i\pi\cdot\left\{ -\cancel{\frac{2}{3}} + \cancel{\frac{1}{3}} + \cancel{\frac{2}{3}} - \cancel{\frac{1}{3}} \right\} = 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+x+2}{x^4-5x^2+4}\,dx = 0$$

Örnek: Aşağıdaki integralin değerini hesaplayın.

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = ?$$

integral içindeki ifade çift fonksiyon olduğundan sınırlar $[-\infty, +\infty]$'ye genişletilip yarısı alınabilir.

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$$

sinx fonksiyonu için üstel ifade kullanılırsa;

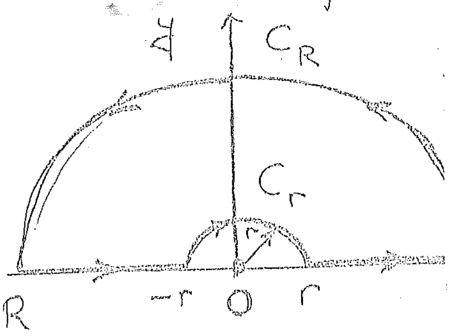
$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{1}{2}\,\mathrm{Im}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x}\,dx$$

x değişkenini z değişkeni ile değiştirirsek

$$\frac{1}{2}\,\mathrm{Im}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ix}}{x}\,dx = \frac{1}{2}\,\mathrm{Im}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{iz}}{z}\,dz$$

O halde, bu üstel fonksiyonun integralini hesaplayıp sanal kısmını almak gerekir.

Fonksiyonun $x=0$'da sadece bir kutup noktası var. Konturumuz:



$$\oint_C \frac{e^{iz}}{z}\,dz = \lim_{\substack{r\to 0\\ R\to\infty}}\int_{-R}^{-r}\frac{e^{ix}}{x}\,dx + \lim_{r\to 0}\int_{C_r}\frac{e^{iz}}{z}\,dz +$$

$$+\lim_{\substack{r\to 0\\ R\to\infty}}\int_{r}^{R}\frac{e^{ix}}{x}\,dx + \lim_{R\to\infty}\int_{C_R}\frac{e^{iz}}{z}\,dz$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ix}}{x}\,dx + \int_{C_r}\frac{e^{iz}}{z}\,dz + \underbrace{\cancel{\int_{C_R}\frac{e^{iz}}{z}\,dz}}_{0}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ix}}{x}\,dx + \int_{C_r}\frac{e^{iz}}{z}\,dz$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx = \oint_C \frac{e^{iz}}{z} dz - \int_{C_r} \frac{e^{iz}}{z} dz =$$

$$= 2\pi i \sum_{k=1}^{N} \operatorname{Res}\left[\frac{f(z_k)}{z_k - a}\right] + i\pi \sum_{j=1}^{M} f(a_j$$

$f = \frac{e^{iz}}{z}$ fonksiyonunun $z=0$ noktası dışı kutup noktası yoktur. Dolayısıyla

$$2\pi i \sum_{k=1}^{N} \operatorname{Res}\left[\frac{f(z_k)}{z_k - a}\right] = 0$$

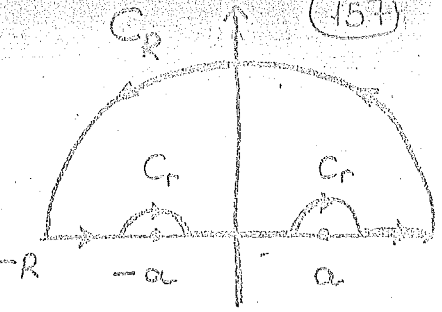
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx = i\pi \cdot f(0) = i\pi \cdot e^{i.0} = i\pi$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{1}{2} \operatorname{Im} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

Örnek: Aşağıdaki integralin verilen sonucunu doğrulayın:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2 - a^2} dx = -\frac{\pi}{a} \sin a$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2 - a^2} dx = \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x^2 - a^2} dx$$



$x^2 = a^2$

$x_1 = a$

$x_2 = -a$

$$\oint_C \frac{e^{iz}}{z^2-a^2}\,dz = \lim_{\substack{r\to 0\\ R\to\infty}} \int_{-R}^{-a} \frac{e^{ix}\,dx}{x^2-a^2} + \lim_{r\to 0} \int_{C_r} \frac{e^{iz}}{z^2-a^2}\,dz$$

$$+ \lim_{r\to 0} \int_{-a+r}^{a-r} \frac{e^{ix}}{x^2-a^2}\,dx + \lim_{r\to 0} \int_{C_r} \frac{e^{iz}}{z^2-a^2}\,dz +$$

$$+ \cancel{\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z^2-a^2}\,dz} \to 0 =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x^2-a^2}\,dx + \lim_{r\to 0} \int_{C_r} \frac{e^{iz}}{z^2-a^2}\,dz + \lim_{r\to 0} \int \frac{e}{z^2}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x^2-a^2}\,dx - i\pi f(-a) - i\pi f(a$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x^2-a^2}\,dx = \oint_C \frac{e^{iz}}{z^2-a^2}\,dz + i\pi f(-a) + i\pi f$$

$$= 2\pi i \sum_{k=1}^{N} \text{Res}\left[\frac{f(z_k)}{z_k - a}\right] + i\pi \left\{ f(-a) + \right.$$

$$= i\pi \left\{ f(-a) + f(a) \right\}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x^2-a^2}\,dx = i\pi \left\{ f(-a) + f(a) \right\}$$

$$f(-a) = \left.\frac{e^{iz}}{z-a}\right|_{z=-a} = \frac{e^{-ia}}{-2a}$$

$$f(a) = \left.\frac{e^{iz}}{z+a}\right|_{z=a} = \frac{e^{ia}}{2a}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x^2-a^2}\,dx = i\pi \cdot \frac{e^{ia}-e^{-ia}}{2a} = \frac{i \cdot i\pi}{a} \sin a =$$

$$= -\frac{\pi}{a} \sin a$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2-a^2}\,dx = \mathrm{Re} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x^2-a^2}\,dx = -\frac{\pi}{a} \sin a$$

Ödev: Aşağıdaki eşitlikleri doğrulayın:

a) $$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\,dx}{8-x^3} = -\frac{\sqrt{3}\,\pi}{6}$$

b) $$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin\frac{\pi x}{4}}{2x-x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}$$

c) $$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2-ix} = \pi$$

d) $$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \pi x}{x-x^5}\,dx = \frac{\pi}{2}\left(3-e^{-\pi}\right)$$

e) $$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{\pi}{2}$$

f) $$\int_{0}^{\infty} \frac{\sin 3x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$$

Bu notlar aşağıdaki kaynak kullanılarak hazırlanmıştır

Kaynak: Fizik ve Mühendislikte Matematik Yöntemler

Prof. Dr. Bekir Karaoğlu, Seçkin Yayıncılık